

Aulas quatro e cinco de tensores e cálculo vetorial

José Fernando Thuorst

I. SISTEMAS DE COORDENADAS ORTOGONAIS

A. Revisão

Passamos a identificar os vetores pelo seu conjunto de componentes, a notação indicial.

$$\mathbf{A} \longrightarrow \{A_i\},$$

Introduzimos duas importantes operações

- O produto escalar

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_j \delta_{ij} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$$

e

- O produto vetorial

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i &= \varepsilon_{ijk} A_j B_k, \\ |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| &= |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta, \end{aligned}$$

De modo análogo introduzimos operações diferenciais para campos vetoriais e escalares

- O gradiente

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= (\nabla \psi)_i \mathbf{e}_i \\ (\nabla \psi)_i &= \frac{\partial \psi}{\partial x_i} =: \partial_i \psi, \end{aligned}$$

cuja interpretação está na identificação da direção de máxima variação do escalar ψ

- O divergente

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \partial_i A_i$$

- O rotacional

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

e uma combinação de duas operações,

- O laplaciano

$$\nabla \cdot (\nabla \psi) = \nabla^2 \psi$$

Abordamos um sistema de coordenadas chamado esférico, e estudamos as modificações que surgem ao escrevermos estas operações nessas coordenadas

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \theta_0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \theta_0 \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Conseguem observar uma curiosidade nestas regras de transformação?

A matriz de transformação inversa é a transposta da direta, caracterizando uma transformação ortogonal.

Qual a função de novos sistemas de coordenadas?

Adaptar-se as simetrias geométricas das condições de contorno nas equações diferenciais parciais presentes nas leis físicas.

Um conjunto ortonormal baseado em superfícies do \mathbb{E}^3 é útil pois estas superfícies podem ser frequentemente identificadas como fronteiras de sistemas físicos onde são requeridas condições a priori dos campos físicos, condições de contorno, para que as equações diferenciais parciais as quais obedecem tenham soluções únicas e assim os modelos tenham poder preditivo.

Quem são os cossenos diretores expressos em termos das lei de transformação e dos fatores de escala, e afinal quem são os fatores de escala?

Começamos escolhendo três famílias de superfícies por suas equações em coordenadas cartesianas, podemos construir bases de vetores que podem ser alternativas as bases cartesianas $\{\mathbf{e}_i\}$, o meio de construção é observar que as superfícies geradas mantendo uma das novas variáveis constantes tem para suas curvas de intersecção um trio de três direções mutuamente perpendiculares (construídas para tal) sobre a qual podemos por três vetores unitários $\{\mathbf{a}_i\}$

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \gamma_3 \mathbf{e}_3 \quad (1)$$

$$\alpha_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_1 \dots \quad (2)$$

$$|\mathbf{a}_1|^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \quad (3)$$

onde α_i são os cossenos diretores que serão identificados em termos das transformações entre as coordenadas curvilíneas e cartesianas. Como esta base é ortonormal por construção logo é linearmente independente e pode ser usada para escrever qualquer vetor

$$\mathbf{A} = \sum_m A_m \mathbf{a}_m, \quad (4)$$

$$A_m = \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{A}, \quad (5)$$

porém como obter tal base a partir do conhecimento das equações que relacionam os conjuntos de coordenadas $\{x_i\}$ e $\{q_i\}$ ou até mesmo $\{q_i\}$ e $\{q'_i\}$.

Primeiro de tudo temos o vetor posição

$$\mathbf{r} = \sum_i x_i(q_1, q_2, q_3) \mathbf{e}_i, \quad (6)$$

que visto desta forma pode ser considerado um campo vetorial, deste podemos fazer três vetores rapidamente

$$\varepsilon_j = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \mathbf{e}_i, \quad (7)$$

definidos localmente e escritos em termos da base cartesiana $\{\mathbf{e}_i\}$. Podemos nos perguntar sobre sua independência linear e por consequência sua habilidade na descrição de um campos vetorial qualquer. Pondo suas componentes como colunas ou linhas de uma matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} & \frac{\partial x_2}{\partial q_j} & \frac{\partial x_3}{\partial q_j} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (8)$$

a condição de independência linear segue da não nulidade do determinante, que também é a condição para a inversão das relações

$$x_i(q_1, q_2, q_3) \leftrightarrow q_i(x_1, x_2, x_3),$$

segundo o teorema da função inversa que exige o não anulamento do determinante da matriz jacobiana que é exatamente a apresentada como parte do processo de determinação da independência linear deste conjunto de vetores.

Tendo esta condição satisfeita podemos continuar e restringir ainda mais, procurando por transformações de coordenadas nas quais valia

$$\varepsilon_j \cdot \varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \text{modulo ao quadrado do vetor se } i=j \end{cases} \quad (9)$$

melhor

$$\begin{aligned} \varepsilon_j \cdot \varepsilon_i &= \sum_i \sum_k \frac{\partial x_m}{\partial q_j} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_k \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} = \delta_{ij} |\varepsilon_i|^2, \end{aligned} \quad (10)$$

ou seja sistemas cujas superfícies coordenadas e por consequencia sua linhas de intersecção sejam ortogonais em todos os pontos.

O próximo passo então é obter uma base normalizada, cuja expressão segue trivialmente de

$$\mathbf{a}_i = \frac{\varepsilon_i}{|\varepsilon_i|} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad (11)$$

o módulo presente é facilmente obtido de sua definição na base cartesiana ortonormal

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|^2 = \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right)^2 = h_i^2, \quad (12)$$

a esta quantidade damos o nome de fator de escala, porque ele escalona as derivadas do vetor posição em relação as coordenadas afim de manter a base normalizada, assim não desempenhado um papel proeminente na magnitude das quantidades físicas vetoriais.

B. Vetores unitários ortogonais e algumas relações

A partir de

$$\mathbf{a}_i = \sum_j \frac{1}{h_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \mathbf{e}_j, \quad (13)$$

identificamos os cossenos diretores dos vetores em coordenadas curvilíneas em relação a base cartesiana fixa

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_k = \sum_j \frac{1}{h_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta_{jk} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}, \quad (14)$$

agora podemos manipular a equação acima, usando a regra da cadeia, e somando sobre o índice carregado pela coordenadas curvilíneas

$$\sum_i h_i \mathbf{a}_i \frac{\partial q_i}{\partial x_k} = \sum_j \mathbf{e}_j \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \sum_j \mathbf{e}_j \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \mathbf{e}_k, \quad (15)$$

e daí podemos obter os cossenos diretores da base cartesiana em relação à base curvilínea

$$\begin{aligned} \sum_j h_j \frac{\partial q_j}{\partial x_k} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_k \\ h_i \frac{\partial q_i}{\partial x_k} &= \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_k, \end{aligned} \quad (16)$$

o que implica em

$$h_i \frac{\partial q_i}{\partial x_k} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}, \quad (17)$$

a partir disso podemos escrever para a base curvilínea uma expressão alternativa

$$\mathbf{a}_i = \sum_j h_i \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_j, \quad (18)$$

e através do módulo unitário, segue mais uma relação para os fatores de escala

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^2 &= \sum_j \sum_k h_i^2 \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \sum_j \sum_k h_i^2 \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \delta_{jk} \\ &= \sum_j h_i^2 \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right)^2 = 1, \end{aligned} \quad (19)$$

o que implica em

$$h_i^2 = \left[\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_3} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (20)$$

Então generalizando e procurando os cossenos diretores de um sistema de coordenadas ortogonais em relação a outro qualquer os quais obviamente estão conectados com o sistema cartesiano, podemos partir da expressão

$$h_i \frac{\partial q_i}{\partial x_k} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_i}, \quad (21)$$

e usando a regra da cadeia eliminar a conexão com as coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} h_i \sum_k \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q'_m} &= \sum_k \frac{1}{h_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q'_m} \\ h_i \frac{\partial q_i}{\partial q'_m} &= \frac{1}{h_i} \sum_n \frac{\partial q'_n}{\partial q_i} \left[\sum_k \frac{\partial x_k}{\partial q'_n} \frac{\partial x_k}{\partial q'_m} \right] \\ &= \frac{1}{h_i} \sum_n \frac{\partial q'_n}{\partial q_i} [\delta_{nm} h_n'^2] = \frac{h_m'^2}{h_i} \frac{\partial q'_m}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (22)$$

ou melhor

$$\frac{h_i}{h'_m} \frac{\partial q_i}{\partial q'_m} = \frac{h'_m}{h_i} \frac{\partial q'_m}{\partial q_i}, \quad (23)$$

que fornece os cossenos diretores entre dois quaisquer conjunto de vetores base ortonormais e de onde podemos obter as lei de transformação para os fatores de escala

$$\begin{aligned} \sum_i h_i^2 \frac{\partial q_i}{\partial q'_m} \frac{\partial q_i}{\partial q'_m} &= h_m'^2 \sum_i \frac{\partial q'_m}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial q'_m} \\ \sum_i h_i^2 \frac{\partial q_i}{\partial q'_m} \frac{\partial q_i}{\partial q'_m} &= h_m'^2 \end{aligned}$$

Pode-se também neste contexto observar que a mudança da base cartesiana para a base ortonormal curvilínea, se dá através de uma matriz ortogonal

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= \sum_j R_{ij} \mathbf{e}_j, \text{ onde} \\ R_{ij} &= \frac{1}{h_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \end{aligned}$$

e pelos produtos escalares já estabelecidos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k &= \sum_j \sum_m R_{ij} R_{km} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_m \\ \delta_{ik} &= \sum_j \sum_m R_{ij} R_{km} \delta_{jm} = \sum_j R_{ij} R_{kj} \\ RR^T &= \mathbf{1} \end{aligned} \quad (24)$$

C. O gradiente

Usando sua definição em coordenadas cartesiana

$$\nabla \psi = \sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad (25)$$

usamos a regra da cadeia

$$\begin{aligned} \nabla \psi &= \sum_i \sum_k \mathbf{e}_i \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \\ &= \sum_k \left(\sum_i \mathbf{e}_i \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \\ &= \sum_k \frac{\mathbf{a}_k}{h_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_k}, \end{aligned} \quad (26)$$

e em relação à qualquer outro

$$\begin{aligned}
\nabla\psi &= \sum_k \frac{\mathbf{a}_k}{h_k} \frac{\partial\psi}{\partial q_k} \\
&= \sum_k \sum_j \frac{\mathbf{a}_k}{h_k} \frac{\partial q'_j}{\partial q_k} \frac{\partial\psi}{\partial q'_j} = \sum_j \left(\sum_k \frac{\mathbf{a}_k}{h_k} \frac{\partial q'_j}{\partial q_k} \right) \frac{\partial\psi}{\partial q'_j} \\
&= \sum_j \frac{\mathbf{a}'_j}{h'_j} \frac{\partial\psi}{\partial q'_j}
\end{aligned} \tag{27}$$

D. O divergente

Sua expressão em coordenadas cartesianas é

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_i \frac{\partial A_{x_i}}{\partial x_i} \tag{28}$$

Agora procuramos as componentes cartesianas em termos das ortogonais, expandindo de forma equivalente em ambas as base

$$\begin{aligned}
\sum A_{x_i} \mathbf{e}_i &= \sum A_i \mathbf{a}_i \\
A_{x_j} &= \sum A_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_j \\
A_{x_i} &= \sum_j \frac{A_j}{h_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_j},
\end{aligned}$$

e substituímos na expressão anterior

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \sum_i \sum_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{A_k}{h_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \\
&= \sum_i \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{A_k}{h_k} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{A_k}{h_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right] \\
&= \sum_k \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{A_k}{h_k} \right) + \sum_k \sum_i \frac{A_k}{h_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \\
&= \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{A_k}{h_k} \right) + \sum_k \frac{A_k}{h_k} \sum_i \sum_j \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \\
&= \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{A_k}{h_k} \right) + \sum_k \frac{A_k}{h_k} \sum_j \frac{1}{h_j^2} \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}
\end{aligned}$$

agora se nossas transformações de coordenadas são duas vezes diferenciáveis podemos comutar as duas últimas derivadas parciais e notar que

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_j^2}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)^2 \\ &= 2 \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = 2 \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k},\end{aligned}\tag{29}$$

e obter

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{A_k}{h_k} \right) + \sum_k \frac{A_k}{h_k} \sum_j \frac{1}{h_j^2} \frac{1}{2} \frac{\partial h_j^2}{\partial q_k} \\ &= \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{A_k}{h_k} \right) + \sum_k \frac{A_k}{h_k} \sum_j \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \log h_j^2 \right)}{\partial q_k} \\ &= \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{A_k}{h_k} \right) + \sum_k \frac{A_k}{h_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_j (\log h_j) \\ &= \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{A_k}{h_k} \right) + \sum_k \frac{A_k}{h_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\log \prod h_j \right) \\ &= \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{A_k}{h_k} \right) + \sum_k \frac{A_k}{h_k} \frac{\partial}{\partial q_k} (\log h_1 h_2 h_3) \\ &= \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{A_k}{h_k} \right) + \sum_k \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{A_k}{h_k} \frac{\partial h_1 h_2 h_3}{\partial q_k} \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[h_1 h_2 h_3 \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{A_k}{h_k} \right) + \sum_k \frac{A_k}{h_k} \frac{\partial (h_1 h_2 h_3)}{\partial q_k} \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{A_k}{h_k} \right) \right]\end{aligned}$$

A partir das expressões para o divergente e o gradiente em um conjunto ortonormal de vetores podemos obter o laplaciano de um escalar

$$\nabla \cdot (\nabla \psi) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(h_1 h_2 h_3 \frac{1}{h_k^2} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \right) \right],$$

e passar a estudar sua separabilidade e sua conexão com problemas pertinentes da física clássica e quântica. Este é só o começo de uma grande sistematização que podemos construir na procura de soluções das leis físicas, bons estudos...