1 Terceira aula

Thalis Girardi thalisjg@gmail.com

Sumário

Requisitos dessa aula
Cálculo diferencial

1.1 Introdução

Até o momento, fizemos todos os nossas cálculos utilizando o sistema de coordenadas cartesiano ou retangular. Esse sistema de coordenadas é muito simples de ser tratado porque os vetores de base $\widehat{e_i}$ que o definem são constantes. Essa simplicidade justifica uma abordagem inicial focada exclusivamente nele. Entretanto podemos nos questionar se esse sistema é sempre o mais conveniente e a resposta é não.

A simetria apresentada por um problema deve guiar a nossa escolha sobre o sistema de coordenadas. Por exemplo, consideramos uma partícula descrevendo um movimento circular uniforme. Podemos considerar que a partícula está sempre a uma distância fixa da origem e se move apenas na direção angular. Em coordenadas cartesianas precisaríamos de duas coordenadas para descrever esse sistema, o movimento estaria contido em um plano. Mas esse movimento pode ser descrito por uma única coordenada, uma coordenada angular. Para conseguirmos a simplicidade de usarmos o menor número possível de coordenadas podemos usar algum tipo de coordenada polar, nesse caso.

Na Física, temos vários exemplos em que escolhas desse tipo podem ser interessantes. Podemos tratar um movimento parabólico através de um sistema de coordenadas parabólicas. Podemos trabalhar com uma força central e o átomo de hidrogênio usando coordenadas esféricas. Podemos estudar o campo magnético gerado por uma corrente que passa por um fio utilizando coordenadas cilindricas. Na verdade, pode-se dizer que um ponto fundamental da Física é saber identificar uma simetria e, com base nisso, fazer as escolhas mais adequadas para que descrevamos da maneira mais simples ou clara um problema.

Posteriormente vamos discutir como levar a notação indicial para coordenadas generalizadas. Isso vai fazer com que possamos determinar as quantidades necessárias (como os operadores gradiente, divergente, laplaciano,...) em qualquer sistema de coordenadas, de maneira muito simples. Nesse ponto, vamos fazer esses cálculos, apenas para coordenadas polares esféricas, de maneira tradicional. Esse ponto de vista é um pouco trabalhoso, mas é útil como um passo intermediário.

1.2 Caso bidimensional

Seja r o comprimento de um vetor e seja θ o ângulo que esse vetor faz com a parte positiva do eixo x (no sentido anti-horário), então podemos escrever

$$x = r\cos\theta, \tag{1}$$

$$y = r\sin\theta. \tag{2}$$

Note que essas equações nos dão duas possibilidades para escrever o vetor posição. No sistema de coordenadas cartesiano temos as coordenadas x e y. No sistema de coordenadas polares temos r e θ, que são chamados, respectivamente de raio e ângulo azimutal. Podemos obter as relações inversas

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{3}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}. \tag{4}$$

Note que as coordenadas não tem obrigatoriamente dimensão de coomprimento. A coordenada θ, por exemplo, é um ângulo e portanto é adimensional.

Um ponto que tínhamos em coordenadas cartesianas, deve ser relacionado univocamente a um ponto em qualquer outro sistema de coordenadas. Pensando em termos de vetores, o vetor permanece o mesmo independentemente da escolha do sistema de coordenadas. Essa escolha modifica apenas as componentes do vetor. Por isso, definimos um intervalo de variação para as coordenadas. Em coorenadas cartesianas temos que $-\infty < x < \infty$ e $-\infty < y < \infty$. Em coordenadas polares temos que $0 \leq r < \infty$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

Em duas dimensões, se x ou y são constantes, obtemos uma família de retas. Se θ é constante obtemos uma família de retas começando na origem. Se r é constante obtemos uma família de circunferências concêntricas, centradas na origem.

1.3 Introduzindo as coordenadas esféricas

Primeiramente, gostaria de esclarecer alguns pontos sobre a notação. Em coordenadas cartesianas denotamos $x_i = x, y, z$ e $\widehat{e}_i = \widehat{\imath}, \widehat{\jmath}, \widehat{k}$. Para outros sistemas de coordenadas, vamos denotar as coordenadas por q_i e os vetores de base por $\widehat{a}_i$. Essa convenção é conveniente para associarmos diferentes sistemas de coordenadas ao cartesiano. Nessa aula não nos preocuparemos muito com a notação indicial (vamos adotar um ponto de vista bem tradicional), mas faremos algumas referências quando for necessário.

Vamos introduzir as relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas esféricas

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \tag{5}$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi, \tag{6}$$
$$z = r \cos\theta, \tag{7}$$

em que o raio r varia entre $0 \leq r < \infty$, o âgulo polar θ varia entre $0 \leq \theta \leq \pi$ e é medido em referência a parte positiva do eixo z, o ângulo azimutal φ varia entre $0 \leq \varphi < 2\pi$ e é medido no plano xy em relação a parte positiva do eixo x, no sentido anti-horário. Esses intervalos de variação fazem com que um ponto qualquer no espaço seja representado de maneira univoca.

As transformações inversas nos dão

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{8}$$
$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{r}, \tag{9}$$
$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}. \tag{10}$$

Aqui podemos ver que se r for constante, temos uma família de esferas concêntricas centradas na origem. Se θ for constante, temos uma família de cones centrados no eixo z, com vértices na origem. Se φ for constante, temos uma família de semi-planos que contém o eixo z.

Deve-se ter em mente que as coordenadas cartesianas são funções das coordenadas esféricas e vice-versa. Futuramente, em virtude disso, teremos que trabalhar com as derivadas parciais dessas quantidades para calcular elementos diferencias e operadores diferenciais. Entretanto, as transformações entre os sistemas de coordenadas nem sempre são facilmente invertidas. Isso torna o método tradicional para obtenção dos operadores diferenciais (em especial) bastante trabalhoso. Torna-se interessante a existência de um método genérico porque, como veremos nas próximas aulas, ele não necessita das derivadas parciais das transformações inversas. As equações que definem as superficies quando fazemos as coordenadas constantes são importantes, pois um ponto qualquer no espaço é definido como a intersecção de três superfícies de diferentes famílias.

1.4 Elemento de linha, vetores unitários e fatores de escala

A posição de uma partícula em cada ponto no espaço é descrita pelo vetor posição em coordenadas cartesianas

$$\overrightarrow{l} = x\widehat{e}_1 + y\widehat{e}_2 + z\widehat{e}_3. \tag{11}$$

Uma pequena variação na posição dessa partícula é dada pelo que chamamos de elemento de linha

$$d\overrightarrow{l} = dx\widehat{e}_1 + dy\widehat{e}_2 + dz\widehat{e}_3. \tag{12}$$

Queremos escrever o elemento de linha em coordenadas esféricas. Lembrando que as coordenadas cartesianas podem ser vistas como funções das novas coordenadas, obtemos com a regra da cadeia na notação indicial

$$d\overrightarrow{l} = dx_i\widehat{e}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}dq_j\widehat{e}_i. \tag{13}$$

Expandindo as somas temos

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{l} &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi\right)\widehat{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi\right)\widehat{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial z}{\partial \varphi}d\varphi\right)\widehat{k}. \end{aligned} \tag{14}$$

No elemento de linha em coordenadas cartesianas aparecem as diferenciais das coordenadas multiplicadas pelos vetores unitários. Esperamos um formato análogo para coordenadas esféricas. Como ainda não conhecemos os vetores unitários, vamos colocar as diferencias dr, $d\theta$ e $d\varphi$ em evidência:

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{l} &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}\widehat{i} + \frac{\partial y}{\partial r}\widehat{j} + \frac{\partial z}{\partial r}\widehat{k}\right)dr + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\widehat{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\widehat{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\widehat{k}\right)d\theta + \\ &+ \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\widehat{i} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\widehat{j} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\widehat{k}\right)d\varphi. \end{aligned} \tag{15}$$

O calculo dessas derivadas parciais é bastante imediato, basta usarmos as relações entre as coordenadas cartesianas e as esféricas que chegamos a equação

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{l} &= \left(\sin\theta\cos\varphi\widehat{i} + \sin\theta\sin\varphi\widehat{j} + \cos\theta\widehat{k}\right)dr + \\ &+ \left(r\cos\theta\cos\varphi\widehat{i} + r\cos\theta\sin\varphi\widehat{j} - r\sin\theta\widehat{k}\right)d\theta + \\ &+ \left(-r\sin\theta\sin\varphi\widehat{i} + r\sin\theta\cos\varphi\widehat{j}\right)d\varphi. \end{aligned} \tag{16}$$

Colocando os termos comuns em evidência temos

$$\begin{aligned}
d\overrightarrow{l} &= \left(\sin\theta\cos\varphi\widehat{i} + \sin\theta\sin\varphi\widehat{j} + \cos\theta\widehat{k}\right) dr + \\
&\quad + r\left(\cos\theta\cos\varphi\widehat{i} + \cos\theta\sin\varphi\widehat{j} - \sin\theta\widehat{k}\right) d\theta + \\
&\quad + r\sin\theta\left(-\sin\varphi\widehat{i} + \cos\varphi\widehat{j}\right) d\varphi. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Aqui definimos a nova base $\{\widehat{a}_i\}$ como sendo os objetos entre parenteses

$$\widehat{r}_0 \equiv \sin\theta\cos\varphi\widehat{i} + \sin\theta\sin\varphi\widehat{j} + \cos\theta\widehat{k}, \qquad (18)$$

$$\widehat{\theta}_0 \equiv \cos\theta\cos\varphi\widehat{i} + \cos\theta\sin\varphi\widehat{j} - \sin\theta\widehat{k}, \qquad (19)$$

$$\widehat{\varphi}_0 \equiv -\sin\varphi\widehat{i} + \cos\varphi\widehat{j}. \qquad (20)$$

Também definimos os fatores multiplicativos que aparecem em (17) como sendo os chamados fatores de escala:

$$h_r \equiv 1, \qquad (21)$$

$$h_\theta \equiv r, \qquad (22)$$

$$h_\varphi \equiv r\sin\theta. \qquad (23)$$

Com essas definições temos

$$d\overrightarrow{l} = \widehat{r}_0 dr + \widehat{\theta}_0 r d\theta + \widehat{\varphi}_0 r\sin\theta d\varphi, \qquad (24)$$

ou ainda

$$d\overrightarrow{l} = h_r dr\widehat{r}_0 + h_\theta d\theta\widehat{\theta}_0 + h_\varphi d\varphi\widehat{\varphi}_0. \qquad (25)$$

Embora θ e φ não tenham dimensão de comprimento, as combinações $h_\theta d\theta$ e $h_\varphi d\varphi$ tem. No caso cartesiano temos um formato análogo, entretanto os fatores de escala são iguais a unidade.

Agora que definimos uma base é importante verificar que o produto escalar satisfaz as relações de ortonormalidade

$$\widehat{a}_i \cdot \widehat{a}_j = \delta_{ij} \qquad (26)$$

e verificar que o produto vetorial satisfaz

$$\widehat{a}_i \times \widehat{a}_j = \varepsilon_{ijk}\widehat{a}_k, \qquad (27)$$

pois assim provamos que o sistema de coordenadas escolhido obedece a regra da mão direita

$$\widehat{a}_i \cdot (\widehat{a}_j \times \widehat{a}_k) = \varepsilon_{ijk}. \qquad (28)$$

Como já foi dito, esse cálculo deve ser feito para qualquer sistema de coordenadas (faça!) para que obtenhamos a convenção de que o volume é positivo. Nesse caso, a maior parte dos termos se cancelam, o restante dos termos é reescrito através da identidade $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Aqui, nós apenas definimos quais são os vetores de base e os fatores de escala. Posteriormente chegaremos a uma expressão genérica que os defina em qualquer sistema de coordenadas. Mesmo nesse ponto, será necessário verificar (caso por caso) que os vetores de base obedecem a regra da mão direita.

1.5 Outros elementos diferenciais

Em qualquer sistema de coordenadas, ao fixarmos uma coordenada como sendo constante, obtemos uma família de superfícies envolvendo as outras duas coordenadas. Por exemplo, fazendo z constante em coordenas cartesianas, definimos uma família de planos xy. Obviamente o vetor $\widehat{e}_3$ é perpendicular a essa superfície. Além disso, temos duas outras famílias de planos: os planos yz que são perpendiculares ao $\widehat{e}_1$ e os planos zx que são perpendiculares ao $\widehat{e}_2$. Um elemento de área de um desses planos é calculado através do produto vetorial entre os elementos de linha que compõe o plano:

$$d\overrightarrow{l_1} \times d\overrightarrow{l_2} = (dx\widehat{e}_1) \times (dy\widehat{e}_2) = dxdy\widehat{e}_3 \equiv dA_z\widehat{e}_3, \tag{29}$$

$$d\overrightarrow{l_2} \times d\overrightarrow{l_3} = (dy\widehat{e}_2) \times (dz\widehat{e}_3) = dydz\widehat{e}_1 \equiv dA_x\widehat{e}_1, \tag{30}$$

$$d\overrightarrow{l_3} \times d\overrightarrow{l_1} = (dz\widehat{e}_3) \times (dx\widehat{e}_1) = dzdx\widehat{e}_2 \equiv dA_y\widehat{e}_2, \tag{31}$$

onde chamamos de $d\overrightarrow{l_i}$ um elemento de linha em uma direção específica $\widehat{e}_i$. Definimos como dA_z o módulo de um elemento de área do plano xy. Fizemos definições análogas para dA_x e dA_y. O elemento de área, em coordenadas cartesianas, é um vetor cujo módulo é o tamanho de um segmento infinitesimal de plano e a direção e sentido são dados por um vetor perpendicular a esse plano.

Já o elemento de volume pode ser escrito como um triplo produto escalar do tipo

$$dV = d\overrightarrow{l_1} \cdot \left(d\overrightarrow{l_2} \times d\overrightarrow{l_3}\right) = dx_1dx_2dx_3\widehat{e}_1 \cdot (\widehat{e}_2 \times \widehat{e}_3) = dx_1dx_2dx_3, \tag{32}$$

onde levamos em conta a sequência de mão direita.

Analogamente, podemos determinar os elementos de área e volume para coordenadas esféricas

$$d\overrightarrow{l_r} \times d\overrightarrow{l_\theta} = (r)\, drd\theta\widehat{\varphi}_0 \equiv dA_\phi\widehat{\varphi}_0, \tag{33}$$

$$d\overrightarrow{l_\theta} \times d\overrightarrow{l_\varphi} = \left(r^2\sin\theta\right) d\theta d\varphi\widehat{r}_0 \equiv dA_r\widehat{r}_0, \tag{34}$$

$$\overrightarrow{dl_\varphi} \times \overrightarrow{dl_r} = (r \sin\theta)\, d\varphi dr \widehat{\theta}_0 \equiv dA_\theta \widehat{\theta}_0, \tag{35}$$

$$dV = \overrightarrow{dl_r} \cdot \left(\overrightarrow{dl_\theta} \times \overrightarrow{dl_\varphi} \right) = \left(r^2 \sin\theta \right) dr d\theta d\varphi. \tag{36}$$

Note que, os elementos diferenciais não são obrigatoriamente segmentos de planos, mas sim elementos das superfícies definidas pelas transformações inversas. Como vimos, em coordenadas esféricas essas superfícies são aquelas famílias de esferas, cones e semi-planos. Os fatores de escala aparecem em todas essas expressões, possibilitando escrever:

$$\begin{aligned} dA_\varphi &= h_r dr h_\theta d\theta, & (37)\\ dA_r &= h_\theta d\theta h_\varphi d\varphi, & (38)\\ dA_\theta &= h_\varphi d\varphi h_r dr, & (39) \end{aligned}$$

$$dV = h_r h_\theta h_\varphi dr d\theta d\varphi. \tag{40}$$

A quantidade $h_r h_\theta h_\varphi$ é o jacobiano da transformação. Veremos isso com muito mais detalhe quando falarmos de coordenadas generalizadas. Novamente, essas expressões são análogas às que aparecem no caso cartesiano, entretanto teríamos $h_x = h_y = h_z = 1$.

1.6 O operador ∇ e o gradiente

Usando integração por partes temos o operador ∇

$$\overrightarrow{\nabla} = \widehat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \widehat{e}_i \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial q_j}. \tag{41}$$

Agora estamos pensando nas coordenadas esféricas como função das coordenadas cartesianas.

Com isso, podemos escrever o gradiente de uma função escalar V:

$$\overrightarrow{\nabla} V = \widehat{e}_i \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j}, \tag{42}$$

ou ainda, abrindo as somas

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla} V &= \widehat{i} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial r} + \widehat{i} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \widehat{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \\ &\quad + \widehat{j} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial r} + \widehat{j} \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \widehat{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \\ &\quad + \widehat{k} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial r} + \widehat{k} \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \widehat{k} \frac{\partial q_j}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial \varphi}. \end{aligned} \tag{43}$$

Na expressão cartesiana para o gradiente aparecem as derivadas da função em função das coordenadas cartesianas. Nosso procedimento aqui vai ser análogo àquele adotado para os elementos de linha, mas agora colocamos em evidência as derivadas da função em termos das coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} V &= \left(\hat{i}\frac{\partial r}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial r}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial r}+\left(\hat{i}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial \theta}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial \theta}+ \\ &+\left(\hat{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial q_j}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial \varphi}\end{aligned} \tag{44}$$

Vamos olhar para essas derivadas com mais ênfase.

Para a derivada de r em função de x basta fazermos uma regra da cadeia

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r} \\ &= \sin\theta\cos\varphi.\end{aligned} \tag{45}$$

As outras duas derivadas do tipo assumem o mesmo formato:

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\theta\sin\varphi, \tag{46}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}=\cos\theta. \tag{47}$$

Para a derivada de θ em função de x podemos usar derivação implicita

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\cos\theta &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{r} \\ -\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{zx}{r^3} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}.\end{aligned} \tag{48}$$

A derivada em função de y é completamente análoga

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}, \tag{49}$$

entretanto para a derivada em função de z temos um termo extra

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}=-\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{r} - \frac{r^2\cos^2\theta}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta}{r}, \tag{50}$$

onde utilizamos a identidade $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Para a derivada de φ em função de x temos

$$\frac{\partial}{\partial x}\tan\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}. \tag{51}$$

Analogamente para a derivada em função de y

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}. \tag{52}$$

A derivada em função de z é nula.

Substituindo esses resultados em (44) temos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}V &= \left(\widehat{i}\sin\theta\cos\varphi + \widehat{j}\sin\theta\sin\varphi + \widehat{k}\cos\theta\right)\frac{\partial V}{\partial r} + \\ &+ \left(\widehat{i}\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} + \widehat{j}\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} - \widehat{k}\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial V}{\partial\theta} + \\ &+ \left(-\widehat{i}\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} + \widehat{j}\frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial V}{\partial\varphi}. \end{aligned} \tag{53}$$

Colocando os termos em comum em evidência e identificando os vetores unitários temos

$$\vec{\nabla}V = \widehat{r}_0\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\widehat{\theta}_0}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{\widehat{\varphi}_0}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}. \tag{54}$$

É interessante notar que podemos identificar os fatores de escala nessa expressão também

$$\vec{\nabla}V = \frac{\widehat{r}_0}{h_r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\widehat{\theta}_0}{h_\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta} + \frac{\widehat{\varphi}_0}{h_\varphi}\frac{\partial V}{\partial\varphi}. \tag{55}$$

O operador ∇ em coordenadas esféricas vale

$$\vec{\nabla} \equiv \widehat{r}_0\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\widehat{\theta}_0}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\widehat{\varphi}_0}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{56}$$

1.7 Divergente e laplaciano

Um vetor em coordenadas esféricas pode ser escrito como

$$\overrightarrow{A} = A_r \widehat{r}_0 + A_\theta \widehat{\theta}_0 + A_\varphi \widehat{\varphi}_0. \tag{57}$$

O divergente pode ser avaliado através do produto escalar do operador ∇ com o vetor $\overrightarrow{A}$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = \left(\widehat{r}_0 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\widehat{\theta}_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\widehat{\varphi}_0}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(A_r \widehat{r}_0 + A_\theta \widehat{\theta}_0 + A_\varphi \widehat{\varphi}_0 \right). \tag{58}$$

É importante notar que os vetores unitários não são constantes, portanto o produto escalar vai gerar novos termos. A derivada dos produtos produziria seis termos para cada coordenadas. Levando em conta que os vetores unitários não dependem de r e que $\widehat{\varphi}_0$ não depende de θ, já temos uma redução na quantidade de termos. Usando a condição de ortonormalidade, os únicos termos que restam são

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(A_r + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \left(A_r \sin\theta + A_\theta \cos\theta + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right), \tag{59}$$

que podem ser reorganizados da seguinte maneira

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(A_r r^2 \sin\theta \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(A_\theta r \sin\theta \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(A_\varphi r \right) \right]. \tag{60}$$

Identificando os fatores de escala temos

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(A_r h_\theta h_\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(A_\theta h_r h_\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(A_\varphi h_r h_\theta \right) \right]. \tag{61}$$

Fazendo $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} V$ em (60) e usando (54), temos o laplaciano de um escalar

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} r^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \sin\theta \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right]. \tag{62}$$

Lembrando das formas para o divergente e para o laplaciano em termos dos fatores de escala podemos escrever

$$\nabla^2 V = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_\theta h_\varphi}{h_r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h_r h_\varphi}{h_\theta} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{h_r h_\theta}{h_\varphi} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \right]. \tag{63}$$

Equações contendo o laplaciano são bastante comuns na Física. Com isso, saber solucioná-las se torna bastante importante. No eletromagnetismo, a equação de Poisson

$$\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{64}$$

nos dá o potencial escalar V gerado por uma distribuição de cargas ρ (ε_0 é uma constante). A solução de uma equação diferencial não-homogênea, depende da solução da equação homogênea:

$$\nabla^2 V = 0. \tag{65}$$

Essa é a chamada equação de Laplace e é uma equação dependente das três coordenadas.

Nosso objetivo aqui é mostrar que essa equação é separável em coordenadas esféricas. Isso implica que podemos separar a equação em três equações independentes, para r, θ e φ. Esse é um exercício importante de ser feito em qualquer sistema de coordenadas.

Sendo assim, temos a equação de Laplace em coordenadas esféricas

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial r}r^2\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0. \tag{66}$$

Vamos supor que a função possa ser escrita como $V(r,\theta,\varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$, com isso temos

$$\Theta\Phi\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial R}{\partial r}r^2\right)+R\Phi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\sin\theta\right)+R\Theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0, \tag{67}$$

ou ainda, se dividirmos tudo por $R\Theta\Phi$

$$\frac{1}{R}\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial R}{\partial r}r^2\right)+\frac{1}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0. \tag{68}$$

Vamos começar evidenciando toda a dependencia em φ:

$$\frac{1}{R}\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial R}{\partial r}r^2\right)+\frac{1}{\Theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\sin\theta\right)=-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=\omega_1^2. \tag{69}$$

Como o sistema de coordenadas é ortogonal as coordenadas são independentes, portanto ω_1^2 é obrigatoriamente uma constante.

Para o restante temos

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial R}{\partial r}r^2\right)=\frac{\omega_1^2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\sin\theta\right)=\omega_2^2, \tag{70}$$

em que ω_2^2 é outra constante.

Com isso, temos três equações distintas

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial R}{\partial r}r^2\right)=\omega_2^2, \tag{71}$$

$$\frac{\omega_1^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\sin\theta\right) = \omega_2^2, \tag{72}$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = -\omega_1^2 \tag{73}$$

e provamos que a equação de Laplace em coordenadas esféricas é seprável.

Não é em todo sistema de coordenadas que usamos essa estratégia para separar a equação de Laplace. Além disso, em alguns casos a separação é apenas parcial. Mesmo nesse caso, a separação facilita muito na solução da equação diferencial.

1.8 Rotacional

De maneira análoga ao divergente, podemos escrever o produto

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = \left(\widehat{r}_0\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\widehat{\theta}_0}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\widehat{\varphi}_0}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \times \left(A_r\widehat{r}_0 + A_\theta\widehat{\theta}_0 + A_\varphi\widehat{\varphi}_0\right). \tag{74}$$

Abrindo os produtos de derivadas e derivando os vetores unitários temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} &= \widehat{r}_0 \times \left[\frac{\partial A_r}{\partial r}\widehat{r}_0 + \frac{\partial A_\theta}{\partial r}\widehat{\theta}_0 + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\widehat{\varphi}_0\right] + \\
&\quad + \frac{\widehat{\theta}_0}{r} \times \left[\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\widehat{r}_0 + A_r\widehat{\theta}_0 + \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\widehat{\theta}_0 - A_\theta\widehat{r}_0 + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\widehat{\varphi}_0\right] + \\
&\quad + \frac{\widehat{\varphi}_0}{r\sin\theta} \times \left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\widehat{r}_0 + A_r\sin\theta\widehat{\varphi}_0 + \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\widehat{\theta}_0 + A_\theta\cos\theta\widehat{\varphi}_0 + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\widehat{\varphi}_0\right] + \\
&\quad - \frac{\widehat{\varphi}_0}{r\sin\theta} \times \left[A_\varphi\left(\cos\varphi\widehat{i} + \sin\varphi\widehat{j}\right)\right].
\end{aligned} \tag{75}$$

Varios termos dessa equação se anulam no produto vetorial, os produtos não nulos nos dão

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} &= \left[\frac{\partial A_\theta}{\partial r}\widehat{\varphi}_0 - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\widehat{\theta}_0\right] + \\
&\quad + \frac{1}{r}\left[-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\widehat{\varphi}_0 + A_\theta\widehat{\varphi}_0 + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\widehat{r}_0\right] + \\
&\quad + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\widehat{\theta}_0 - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\widehat{r}_0 + A_\varphi\widehat{k}\right].
\end{aligned} \tag{76}$$

É importante notar que, do mesmo modo que podemos escrever os vetores unitários $\widehat{a}_i$, pertencentes ao novo sistema de coordenadas, em função do vetores $\widehat{e}_i$ da base canônica, também podemos fazer o inverso. Com isso, podemos escrever

$$\widehat{k} = \cos\theta\widehat{r}_0 - \sin\theta\widehat{\theta}_0, \tag{77}$$

portanto

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left[\frac{\partial A_\theta}{\partial r}\widehat{\varphi}_0 - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\widehat{\theta}_0\right] + \\
&+\frac{1}{r}\left[-\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\widehat{\varphi}_0 + A_\theta\widehat{\varphi}_0 + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta}\widehat{r}_0\right] + \\
&+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\widehat{\theta}_0 - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\widehat{r}_0 + A_\varphi\left(\cos\theta\widehat{r}_0 - \sin\theta\widehat{\theta}_0\right)\right]. \qquad (78)
\end{aligned}$$

Em três dimensões, podemos escrever um rotacional em termos de um determinante. Pensando no formato desse determinante em coordenadas cartesianas, vamos juntar os termos de acordo com a direção

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \widehat{r}_0\left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(-\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} + A_\varphi\cos\theta\right)\right] + \\
&+\widehat{\theta}_0\left[\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - A_\varphi\sin\theta\right) - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\right] + \\
&+\widehat{\varphi}_0\left[\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(-\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + A_\theta\right)\right]. \qquad (79)
\end{aligned}$$

Podemos unir os termos entre parenteses, identificando a presença de algo dependente dos fatores de escala. Com algumas modificações algébricas simples fica

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \widehat{r}_0\left[\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\sin\theta A_\varphi\right) - \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(rA_\theta\right)\right] + \\
&+\widehat{\theta}_0\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A_r\right) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta A_\varphi\right)\right] + \\
&+\widehat{\varphi}_0\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_r\right)\right], \qquad (80)
\end{aligned}$$

onde podemos evidenciar o jacobiano

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\widehat{r}_0\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\sin\theta A_\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(rA_\theta\right)\right] + \\
&+\frac{1}{r^2\sin\theta}r\widehat{\theta}_0\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A_r\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\sin\theta A_\varphi\right)\right] + \\
&+\frac{1}{r^2\sin\theta}r\sin\theta\widehat{\varphi}_0\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_r\right)\right]. \qquad (81)
\end{aligned}$$

Nesse ponto é fácil identificar o rotacional como um determinante

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \widehat{r}_0 & r\widehat{\theta}_0 & r\sin\theta\widehat{\varphi}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}, \tag{82}$$

ou ainda

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \begin{vmatrix} h_r\widehat{r}_0 & h_\theta\widehat{\theta}_0 & h_\varphi\widehat{\varphi}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ h_r A_r & h_\theta A_\theta & h_\varphi A_\varphi \end{vmatrix}. \tag{83}$$

1.9 Um método geral

Se olharmos para os elementos diferenciais que obtivemos anteriormente, vemos que eles podem ser escritos com o auxílio dos fatores de escala

$$d\overrightarrow{l} = h_r\widehat{r}_0 dr + h_\theta\widehat{\theta}_0 d\theta + h_\varphi\widehat{\varphi}_0 d\varphi, \tag{84}$$

$$\begin{aligned} dA_\varphi &= h_r dr h_\theta d\theta, & (85)\\ dA_r &= h_\theta d\theta h_\varphi d\varphi, & (86)\\ dA_\theta &= h_\varphi d\varphi h_r dr, & (87) \end{aligned}$$

$$dV = h_r h_\theta h_\varphi dr d\theta d\varphi. \tag{88}$$

O mesmo vale para os operadores diferenciais

$$\overrightarrow{\nabla} V = \frac{\widehat{r}_0}{h_r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\widehat{\theta}_0}{h_\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\widehat{\varphi}_0}{h_\varphi}\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \tag{89}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(A_r h_\theta h_\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\theta h_r h_\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A_\varphi h_r h_\theta\right)\right], \tag{90}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{h_\theta h_\varphi}{h_r}\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{h_r h_\varphi}{h_\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{h_r h_\theta}{h_\varphi}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)\right], \tag{91}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \begin{vmatrix} h_r\widehat{r}_0 & h_\theta\widehat{\theta}_0 & h_\varphi\widehat{\varphi}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ h_r A_r & h_\theta A_\theta & h_\varphi A_\varphi \end{vmatrix}. \tag{92}$$

Resultados análogos a esses podem ser obtidos em qualquer sistema de coordenadas. Todavia, mesmo em coordenadas esféricas, esse procedimento é bastante longo. Para sistemas de coordenadas mais complexos o trabalho é ainda maior.

Além disso, quantidades como os fatores de escala e os vetores unitários simplesmente foram impostos, não houve demonstração alguma para chegar neles. Nas próximas aulas, vamos generalizar essas expressões para qualquer sistema de coordenadas. Conhecendo as transformações do sistema de coordenadas cartesiano para outro sistema, poderemos escrever a base de vetores unitários desse novo sistema e também os fatores de escala. Com isso, estaremos aptos a escrever todos os elementos e operadores diferenciais de maneira bastante simples e direta.

1.10 Exercícios

1. Sejam as relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares cilíndricas

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, && (93)\\ y &= \rho\sin\theta, && (94)\\ z &= z, && (95) \end{aligned}$$

com $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $-\infty < \rho < \infty$, então:

a) Encontre as transformações inversas;

b) Descreva as superfícies associadas a cada uma das coordenadas constantes;

c) Encontre os vetores de base e os fatores de escala;

d) Mostre que os vetores de base em coordenadas cilindricas são ortonormais e satisfazem a regra da mão direita. Para isso calcule todos os produtos escalares e os produtos vetoriais entre eles, bem como o triplo produto escalar.

e) Escreva os vetores unitários cartesianos em função da nova base;

f) Obtenha expressões para os elementos diferencias e para os operadores diferenciais em termos dosfatores de escala e da nova base;

g) Determine a velocidade e a aceleração nesse novo sistema;

2. Mostre que a equação

$$\nabla^2 V(r,\theta,\varphi) + \left[k^2 + f(r) + \frac{g(\theta)}{r^2} + \frac{h(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}\right] = 0 \tag{96}$$

é separável.

3. Mostre que

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \widehat{r}_0 & r\widehat{\theta}_0 & r\sin\theta\widehat{\varphi}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}. \tag{97}$$

4. Calcule a velocidade e a aceleração em coordenadas esféricas.