1 Segunda aula

Luciana Ebani luci.ebani@gmail.com

Sumário:
1. Operador Diferencial;
2. Grandiente de uma função escalar;
3. Divergente de um vetor;
4. Rotacional de um vetor;
5. Laplaciano;
6. Algumas identidades;
7. Rotações: vetores, escalares, tensores, pseudovetores e pseudotensores;
8. Exercitando;

1.1 Operador diferencial

A definição do operador derivada, em coordenadas cartesianas ortogonais é dada por

$$\nabla \equiv \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial x}, \tag{1}$$

escrito na notação indicial

$$\nabla = \partial_i \hat{e}_i, \tag{2}$$

onde $\hat{e}_i$ são os vetores da base ortonormais $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, e

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{3}$$

onde $i = 1, 2, 3$ associados a x, y, z, respectivamente.

Através da definição do operador derivada podemos definir algumas operações envolvendo este operador, conhecidas como gradiente, divergente, rotacional e laplaciano, que são as operações comumente encontradas nas equações diferenciais que descrevem as leis físicas, como as equações de Laplace, Poisson, Helmholtz, entre muitas outras equações importantes.

1.2 Gradiente de uma função escalar:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\phi &= \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}\phi + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}\phi + \hat{k}\frac{\partial}{\partial x}\phi & (4)\\ &= \partial_i \phi \hat{e}_i; & (5) \end{aligned}$$

em componentes

$$\left(\vec{\nabla}\phi\right)_i = \partial_i \phi \tag{6}$$

1.3 Divergente de um vetor:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{j} &= \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(j_x\hat{\imath}+j_y\hat{\jmath}+j_z\hat{k}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}j_x+\frac{\partial}{\partial y}j_y+\frac{\partial}{\partial z}j_z \qquad (7)\\
&= \partial_i j_i; \qquad (8)
\end{aligned}
$$

1.4 Rotacional de um vetor (em 3D):

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k} \qquad (9)\\
&= \epsilon_{ijk}\partial_i A_j\hat{e}_k; \qquad (10)
\end{aligned}
$$

em componentes

$$\left(\nabla\times\vec{A}\right)_i=\epsilon_{ijk}\partial_i A_j; \qquad (11)$$

1.5 Laplaciano

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\nabla &= \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (12)\\
&= \partial_i\partial_i; \qquad (13)
\end{aligned}
$$

1.6 Algumas identidades

O uso direto das relações anteriores permite demonstrar várias identidades importantes:

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\nabla\times\vec{f} &= \partial_i\epsilon_{ijk}\partial_j f_k\\
&= \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j f_k\\
&= 0, \qquad (14)
\end{aligned}
$$

aqui consideraremos que a função vetorial $\vec{f}$ é duplamente diferenciável (ou seja, é de classe C^2) permitindo que as derivadas $\partial_i\partial_j$ comutem entre si. Desta forma, a operação acima é identicamente nula porque estamos contraindo uma quantidade antissimétrica (ϵ_{ijk}) com uma quantidade simétrica ($\partial_i\partial_j$) pela troca dos índices. Vejamos este ponto com mais detalhe. Considerando duas quantidades quaisquer, S_{ij} e A_{ij}, sendo a primeira simétrica pela troca dos indices i e j e a segunda antisimétrica,

$$
\begin{aligned}
S_{ij} &= S_{ji} \qquad (15)\\
A_{ij} &= -A_{ji}, \qquad (16)
\end{aligned}
$$

tomemos agora

$$S_{ij}A_{ij}=-S_{ji}A_{ji}, \qquad (17)$$

redefinindo os índices de soma

$$\begin{aligned} S_{ij}A_{ij} &= -S_{ij}A_{ij} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

mostrando que esta equação é identicamente nula como queríamos demonstrar.

Próxima:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \phi &= \epsilon_{ijk}\partial_j \partial_i \phi \hat{e}_k \\ &= 0; \end{aligned} \tag{19}$$

Próxima:

$$\begin{aligned} \left[\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right)\right]_i &= \left(\nabla \times \vec{B}\right)_i \\ &= \epsilon_{ijk}\partial_j B_k \\ &= \epsilon_{ijk}\partial_j \epsilon_{klm}\partial_l A_m \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}\partial_j \partial_l A_m \\ &= \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)\partial_j \partial_l A_m \\ &= \partial_i \partial_m A_m - \partial_l \partial_l A_i \\ &= \left[\nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right)\right]_i - \nabla^2 \vec{A}_i \end{aligned} \tag{20}$$

Próxima:

$$\begin{aligned} \nabla\left(\phi\varphi\right) &= \partial_i\left(\phi\varphi\right)\hat{e}_i \\ &= \varphi\partial_i\phi\hat{e}_i + \phi\partial_i\varphi\hat{e}_i \\ &= \varphi\left(\nabla\phi\right) + \phi\left(\nabla\varphi\right) \end{aligned} \tag{21}$$

Próxima:

$$\begin{aligned} \nabla\left(\vec{f} \cdot \vec{g}\right) &= \partial_i\left(f_j g_j\right)\hat{e}_i \\ &= \left(\partial_i f_j\right) g_j \hat{e}_i + f_j\left(\partial_i g_j\right)\hat{e}_i, \end{aligned} \tag{22}$$

daqui podemos ver que não podemos identificar com nenhuma das operações que definimos anteriormente, desta forma, podemos modificá-los de maneira conveniente de forma que alguma identificação seja possível. Começando pelo primeiro termo do lado direito

$$\left(\partial_i f_j\right) g_j \hat{e}_i = \delta_{jk}\delta_{im}\left(\partial_i f_j\right) g_k \hat{e}_m, \tag{23}$$

uso a delta nos dois índices sem a derivada, desta forma, posso substituir o produto das deltas por

$$\delta_{jk}\delta_{im} = \epsilon_{jil}\epsilon_{lkm} + \delta_{jm}\delta_{ki}, \tag{24}$$

tal que

$$\begin{aligned}
\delta_{jk}\delta_{im}\left(\partial_i f_j\right) g_k\hat{e}_m &= \left(\epsilon_{jil}\epsilon_{lkm} + \delta_{jm}\delta_{ki}\right)\left(\partial_i f_j\right) g_k\hat{e}_m \\
&= \left(\epsilon_{jil}\epsilon_{lkm}\right)\left(\partial_i f_j\right) g_k\hat{e}_m + \left(\delta_{jm}\delta_{ki}\right)\left(\partial_i f_j\right) g_k\hat{e}_m \\
&= -\epsilon_{ijl}\partial_i f_j \epsilon_{lkm} g_k\hat{e}_m + \partial_k f_m g_k\hat{e}_m \\
&= \epsilon_{klm} g_k\left(\nabla\times\vec{f}\right)_l\hat{e}_m + \left(g\cdot\nabla\right) f_m\hat{e}_m \\
&= \vec{g}\times\left(\nabla\times\vec{f}\right) + \left(\vec{g}\cdot\nabla\right)\vec{f} \qquad (25)
\end{aligned}$$

da mesma forma para o segundo termo

$$f_j\left(\partial_i g_j\right)\hat{e}_i = \delta_{jm}\delta_{ik} f_m\hat{e}_k\left(\partial_i g_j\right), \qquad (26)$$

substituindo

$$\delta_{jm}\delta_{ik} = \epsilon_{jil}\epsilon_{lmk} + \delta_{jk}\delta_{mi} \qquad (27)$$

temos

$$\begin{aligned}
f_j\left(\partial_i g_j\right)\hat{e}_i &= \left(\epsilon_{jil}\epsilon_{lmk} + \delta_{jk}\delta_{mi}\right) f_m\hat{e}_k\left(\partial_i g_j\right) \\
&= \left(\epsilon_{jil}\epsilon_{lmk}\right) f_m\hat{e}_k\left(\partial_i g_j\right) + \left(\delta_{jk}\delta_{mi}\right) f_m\hat{e}_k\left(\partial_i g_j\right) \\
&= -\left(\epsilon_{lmk}\right) f_m\hat{e}_k\left(\epsilon_{ijl}\partial_i g_j\right) + f_i\left(\partial_i g_j\right)\hat{e}_j \\
&= \left(\epsilon_{mlk}\right) f_m\left(\nabla\times\vec{g}\right)_l\hat{e}_k + f_i\left(\partial_i g_j\right)\hat{e}_j \\
&= \left[\vec{f}\times\left(\nabla\times\vec{g}\right)\right]_k\hat{e}_k + \left(\vec{f}\cdot\nabla\right) g_j\hat{e}_j \\
&= \left[\vec{f}\times\left(\nabla\times\vec{g}\right)\right] + \left(\vec{f}\cdot\nabla\right)\vec{g} \qquad (28)
\end{aligned}$$

1.7 Rotações: Vetores e Escalares

Para descrever as quantidades físicas, sempre usamos a matemática como linguagem, e separamos estas quantidades em 4 principais categorias: escalares, vetores, tensores e espinores, mas e o que define o caráter de cada um desses objetos matemáticos?

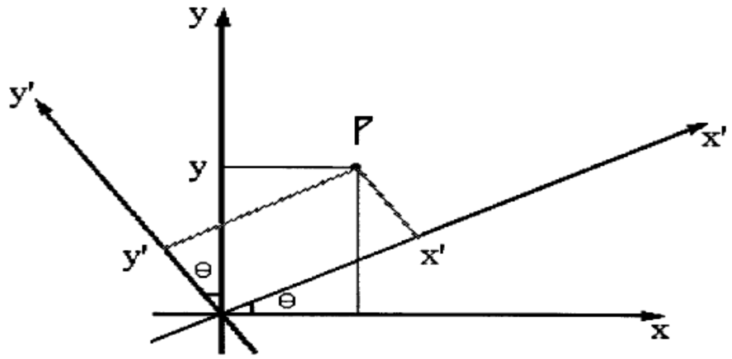
Resposta: são as rotações nos sistema de eixos coordenados do espaço vetorial específico.

Na física clássica Newtoniana e na mecânica quântica não-relativística as rotações são representadas pelas usuais rotações nos eixos coordenados nos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, dando o caráter de cada uma destas quantidades através da rotação que este objeto faz frente a um determinado sistema de eixos coordenados.

Na física relativística, onde o tempo e as coordenadas espaciais são distintas os objetos adquirem outro caráter, como é o caso da energia, que na mecânica newtoniana é um escalar e na física relativística, junto com o momento formam as componentes de um quadri-vetor, o mesmo acontece com o potencial eletrostático e a corrente, portanto, ao se discutir uma teoria física devemos antes de mais nada explicitar as possíveis rotações de eixos coordenados que se quer adotar e só depois poderemos distinguir o caráter destas grandezas.

Aqui é importante mencionar que trabalharemos com exemplos de rotação considerando um espaço euclidiano, e para fins de simplificação trabalharemos a seguir no $\mathbb{R}^2$.

Fazendo uma rotação fixa no plano, "rodando" o sistema de coordenada $x - y$ para $x\prime - y\prime$, através de um ângulo θ:



(29)

A princípio poderíamos supor que esta matriz tem 4 graus de liberdade independentes, mas fazendo uma análise mais detalhada podemos concluir que as componentes se relacionam através dos cossenos diretores. Os ângulos diretores são os ângulos que cada eixo rodado faz com o eixo anterior, relacionando o sistema de coordenadas "com linha" com o sistema de coordenadas "sem linha".

Desta forma, podemos ver que a matriz de rotação, dada pelos cossenos diretores, é dada por

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos(x',x) + y\cos(x',y) \\
&= x\cos\theta + y\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\
&= x\cos\theta + y\sin\theta,
\end{aligned}
$$

e,

$$
\begin{aligned}
y' &= x\cos(y',x) + y\cos(y',y) \\
&= x\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + y\cos\theta \\
&= -x\sin\theta + y\cos\theta. \qquad (30)
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança $x \to x_1$ e $y \to x_2$, podemos escrever o sistema rotacionado em função do sistema de coordenadas anterior como

$$
\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad (31)
$$

onde esta é a primeira matriz de rotação que a gente se depara na física.

Mas e o que isso tem a nos dizer? No caso do espaço euclidiano (podendo ser generalizado para N dimensões), temos o conjunto das matrizes ortogonais, que mantém o produto escalar invariante sob qualquer tipo de rotação.

Através da análise de mudança de base, podemos caracterizar um vetor de forma mais precisa, desta forma ao invés de escrevermos um vetor como $\vec{V}$ (independente da base), vamos olhar apenas para suas componentes, que como vimos anteriormente são particulares a cada base, desta forma, dizemos que as quantidades V_i constituem um vetor se, através de uma mudança de base, elas se transformam como o sistema de coordenadas (31).

Sendo assim, podemos escrever

$$V_i' = \sum_{j=1}^{2} R_{ij} V_j, \text{ com } i = 1, 2, \tag{32}$$

onde os coeficientes R_{ij} são os componentes da matriz de rotação, dada por

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \tag{33}$$

onde

$$\begin{aligned} R_{ij} &= i' \cdot j \\ &= \cos(i', j) \end{aligned} \tag{34}$$

sendo que R é unitária, satisfaz a seguinte relação

$$RR^t = 1, \tag{35}$$

com determinante igual a 1, ou seja R é uma matriz ortogonal $n \times n$, com determinante igual a unidade. Uma matriz com estas duas características é denominada matriz do $O(n)$ e se o determinante for igual a $+1$, temos o subgrupo $SO(n)$.

Como mencionamos acima, é importante observar que matrizes do $SO(n)$ preservam a norma dos vetores, dada por

$$|V| = \sqrt{V_i V_i}, \tag{36}$$

fazendo uma rotação de $SO(n)$,

$$V_i' = R_{ij} V_j, \tag{37}$$

portanto

$$\begin{aligned} V_i' V_i' &= V_j V_j \\ R_{ij} R_{ik} V_j V_k &= V_j V_j, \end{aligned} \tag{38}$$

assumindo a condição de ortogonalidade (35)

$$R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk}, \tag{39}$$

onde R_{ik}, pode ser identificada como

$$(R_{ki})^t. \tag{40}$$

Aproveitando a definição de vetores podemos introduzir as grandezas ditas escalares, estas não se transformam sob rotações, sendo que quando observadas através de diferentes pontos no espaço não modificam sua estrutura, por exemplo,

$$\phi(x) \equiv A_x^2(x) + A_y^2(x), \tag{41}$$

escrevendo esta grandeza no sistema de coordenadas transformado, temos

$$\phi'(x') = A_x'^2(x') + A_y'^2(x'), \tag{42}$$

substituindo, temos

$$\begin{aligned}
\phi'(x') &= (A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi)^2 + (-A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi)^2 \\
&= A_x^2\cos^2\varphi + 2A_xA_y\cos\varphi\sin\varphi + A_y^2\sin^2\varphi \\
&\quad + A_x^2\sin^2\varphi - 2A_xA_y\cos\varphi\sin\varphi + A_y^2\cos^2\varphi \\
&= A_x^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + A_y^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) \\
&= A_x^2(x) + A_y^2(x) \\
&= \phi(x),
\end{aligned} \tag{43}$$

tal que as componentes desta grandeza permanecem invariantes, o mesmo não acontece com os vetores visto que seu módulo não varia, mas suas componentes vistas de um outro sistema de coordenadas sim.

Até aqui já sabemos distinguir vetores de escalares, dado que para caracterizar os vetores precisamos de módulo, direção e sentido. Mas tudo o que tem módulo, direção e sentido é um vetor?

A resposta é não e aí a necessidade de introduzirmos grandezas mais gerais, estas chamadas de tensores.

1.8 Tensor

Agora vamos olhar para um objeto que possui três componentes, onde

$$T_{11}; T_{12} = T_{21}; T_{22}, \tag{44}$$

definidas como se

$$T_{11} = A_x^2 \tag{45}$$

$$T_{12} = T_{21} = A_xA_y \tag{46}$$

$$T_{22} = A_y^2, \tag{47}$$

onde esta grandeza é gerada pelo produto das componentes do vetor $\vec{A}$ consigo próprio.

Vejamos como o mesmo reage a transformações,

$$\begin{aligned}
T'_{11} &= A'_x \\
&= (A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi)^2 \\
&= A_x^2\cos^2\varphi + 2A_xA_y\cos\varphi\sin\varphi + A_y^2\sin^2\varphi \\
&= T_{11}\cos^2\varphi + 2T_{12}\cos\varphi\sin\varphi + T_{22}\sin^2\varphi,
\end{aligned} \tag{48}$$

a próxima

$$\begin{aligned}
T'_{22} &= A_y^2 \\
&= (-A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi)^2 \\
&= A_x^2\sin^2\varphi - 2A_xA_y\cos\varphi\sin\varphi + A_y^2\cos^2\varphi \\
&= T_{11}\sin^2\varphi - 2T_{12}\cos\varphi\sin\varphi + T_{22}\cos^2\varphi,
\end{aligned} \tag{49}$$

e

$$\begin{aligned}
T'_{12} &= A'_x A'_y \\
&= (A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi)(-A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi) \\
&= -A_x^2 \cos\varphi \sin\varphi + A_x A_y \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + A_y^2 \sin\varphi\cos\varphi \\
&= -T_{11}\cos\varphi\sin\varphi + T_{12}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) + T_{22}\sin\varphi\cos\varphi, \qquad (50)
\end{aligned}$$

podemos ver que a transformação de cada uma das componentes T_{ij} $(i, j = 1, 2)$ depende linearmente das demais componentes. Este padrão de comportamente define um tensor. Portanto, em outras palavras podemos definir um tensor como um objeto que sob rotações se transforma dependendo linearmente das componentes do tensor original.

Levando em conta essas considerações, podemos introduzir o conceito de tensor de forma muito natural, ou seja, um tensor é uma generalização de um vetor, tal que sempre podemos agrupar o conjunto das transformaçoes na forma matricial como

$$\begin{aligned}
T'_{ij} &= R_{ik}R_{jl}T_{kl} \text{ (tensor de rank 2)} \qquad (51)\\
T'_{ijk} &= R_{il}R_{jm}R_{kn}T_{lmn} \text{ (tensor de rank 3),} \qquad (52)
\end{aligned}$$

onde cada um dos índices se transforma como o índice de um vetor. Sendo assim, podemos generalizar e dizer que o escalar é um tensor de rank 0 e o vetor é um tensor de rank 1.

Qualquer tensor T_{ij} pode ser escrito como a soma de um tensor simétrico com um antissimétrico,

$$\begin{aligned}
T_{ij} &= \frac{1}{2}T_{ij} + \frac{1}{2}T_{ij} \\
&= \frac{1}{2}T_{ij} + \frac{1}{2}T_{ij} + \frac{1}{2}T_{ji} - \frac{1}{2}T_{ji} \\
&= S_{ij} + A_{ij}, \qquad (53)
\end{aligned}$$

onde S_{ij} é um tensor simétrico e A_{ij} é um tensor antisimétrico pela troca de índices i e j. Podemos encontrar quantas componentes independentes cada um dos tensores (S_{ij} e A_{ij}) possui.

Estamos considerando um tensor $n \times n$, então para calcularmos o número de componentes independentes chamaremos n os componentes da diagonal principal (dado que é uma matriz $n \times n$), m as componentes da parte triangular superior e l as componentes da parte triangular inferior, desta forma as componentes de um tensor são dadas por

$$n + m + l = n^2, \qquad (54)$$

no caso de um tensor simétrico temos que $m = l$, portanto

$$\begin{aligned}
n + 2m &= n^2 \\
m &= \frac{n(n-1)}{2}, \qquad (55)
\end{aligned}$$

desta forma temos

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \text{ componentes independentes para } S_{ij} \qquad (56)$$

da mesma forma para um tensor antissimétrico, com a exceção que as componentes da diagonal principal são identicamente nulas, desta forma

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ componentes independentes para } A_{ij}; \qquad (57)$$

1.9 Pseudovetor e Pseudotensor

Há mais um ponto a se considerar que poderia passar por nós despercebido, tomemos a relação de ortogonalidade das matrizes de rotação,

$$RR^t = 1, \tag{58}$$

tirando o determinante,

$$\begin{aligned} \det\left(RR^t\right) &= 1 \\ \det R \det R^t &= 1 \\ (\det R)^2 &= 1 \\ \det R &= \pm, 1 \end{aligned} \tag{59}$$

como vimos quando consideramos o determinante de $R = 1$ estamos falando do grupo especial de rotações definido pelo $SO\left(n\right)$, que corresponde às mudanças de base através de rotação, ou seja, são aquelas que levam uma base a outra mas de mesma natureza (base dextrógira, regra da mão direita),

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j \cdot \hat{e}_k = \epsilon_{ijk}. \tag{60}$$

A mudança de uma base dextrógira para uma base levógira (caso em que o determinante é igual a -1)

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j \cdot \hat{e}_k = -\epsilon_{ijk}, \tag{61}$$

é feita pela inversão de eixos (os eixos unitários mudam de sinal), esta mudança é chamada de transformação de paridade.

Para exemplificar, consideramos dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, em uma mudança de base suas componentes transformam-se como

$$A'_i = R_{ij}A_j \tag{62}$$

$$B'_j = R_{ij}B_j, \tag{63}$$

com R satisfazendo a relação de ortogonalidade. Seja $\vec{C}$ o produto vetorial entre eles

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}, \tag{64}$$

como já vimos, sempre podemos escrever o produto vetorial como

$$C_k = \epsilon_{ijk}A_iB_j, \tag{65}$$

fazendo uma transformação, temos

$$\begin{aligned} C'_k &= \epsilon'_{ijk}A'_iB'_j \\ &= \epsilon_{ijk}R_{il}R_{jm}A_lB_m \\ &= \epsilon_{ijn}\delta_{nk}R_{il}R_{jm}A_lB_m \\ &= R_{kr}\left(\epsilon_{ijn}R_{il}R_{jm}R_{nr}\right)A_lB_m, \end{aligned} \tag{66}$$

lembrando que

$$\epsilon_{lmn}\left(\det R\right) = \epsilon_{ijn}R_{il}R_{jm}R_{nr}, \tag{67}$$

substituindo

$$
\begin{aligned}
C'_k &= (\det R)\, R_{kr} \epsilon_{lmn} A_l B_m \\
&= (\det R)\, R_{kr} C_n, \qquad (68)
\end{aligned}
$$

portanto podemos concluir que a transformação de $\vec{C}$ difere das transformações de $\vec{A}$ e $\vec{B}$, pois ela é sensitiva à natureza das bases, por isso as quantidades que se transformam como $\vec{C}$ são chamadas de pseudovetores, ou vetores axiais.

O mesmo ocorre com os tensores. Aqueles que se transformam de maneira sensitiva à natureza do sistema de coordenadas são chamados de pseudotensores ou tensores axiais. Um exemplo imediato de pseudotensor é a tensor de Levi-Civita,

$$
\epsilon'_{ijk} = (\det R)\, R_{il} R_{jm} R_{kn} \epsilon_{lmn}, \qquad (69)
$$

que é sensível ao valor do determinante de R.

1.10 Exercitando...

Assim como o tensor de Levi-Civita e o delta de Kronecker estas quantidades são apenas símbolos, desta forma, podemos mostrar que estes são os mesmos em qualquer sistema de coordenadas.

Usando a equação (69)

$$
\begin{aligned}
\epsilon'_{ijk} &= (\det R)\, R_{il} R_{jm} R_{kn} \epsilon_{lmn} \\
\epsilon'_{ijk} &= (\det R)\, (\det R)\, \epsilon_{ijk} \\
\epsilon'_{ijk} &= (\det R)^2\, \epsilon_{ijk} \\
\epsilon'_{ijk} &= \epsilon_{ijk}. \qquad (70)
\end{aligned}
$$

Já como o delta de Kronecker é um tensor de 2 índices fazemos

$$
\delta'_{ij} = R_{ik} R_{jm} \delta_{km}, \qquad (71)
$$

usando a propriedade do delta temos

$$
\begin{aligned}
\delta'_{ij} &= R_{im} R_{jm} \\
\delta'_{ij} &= \delta_{ij}. \qquad (72)
\end{aligned}
$$

Também podemos mostrar que as operações definidas através dos operadores diferenciais, apresentados anteriormente, se transformam sob rotações. No caso do gradiente de um escalar, vemos que esta quantidade é um tensor de rank 1 (vetor).

Para analisarmos o caráter deste objeto fazemos uma rotação no sistema de coordenadas tal que

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla}\phi\right)_i &= \left(\vec{\nabla}'\phi'\right)_i \qquad (73) \\
&= \partial'_i \phi' \qquad (74)
\end{aligned}
$$

como $\phi\left(x_i\right)$ é uma quantidade escalar, permanece invariante,

$$\vec{\nabla}'\phi' = R_{ij}\partial_j\phi \tag{75}$$

mostrando que a matriz de rotação R_{ij} "roda" esta quantidade, dando o caráter vetorial associado a operação.

Já o divergente de um vetor, pode ser entendido como um produto escalar do operador derivada com um vetor qualquer $\vec{A}$,

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A} = \partial_i A_i, \tag{76}$$

fazendo uma rotação

$$\begin{aligned}\partial_i' A_i' &= R_{ij}R_{ik}\partial_j A_k \\ &= \delta_{jk}\partial_j A_k \\ &= \partial_j A_j.\end{aligned} \tag{77}$$

Já o rotacional de um vetor pode ser entendido (em coordenadas cartesianas) como um produto vetorial,

$$\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}\right)_i = \epsilon_{ijk}\partial_i A_j, \tag{78}$$

fazendo uma mudança no sistema de coordenadas,

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\nabla'}\times\overrightarrow{A'}\right)_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j' A_k' \\ &= \epsilon_{ijk}R_{jl}\partial_l R_{km}A_m \\ &= \epsilon_{njk}\delta_{in}R_{jl}R_{km}\partial_l A_m \\ &= \epsilon_{njk}R_{io}R_{no}R_{jl}R_{km}\partial_l A_m \\ &= (\det R)\, R_{io}\epsilon_{olm}\partial_l A_m \\ &= (\det R)\, R_{io}\left(\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}\right)_o,\end{aligned} \tag{79}$$

aqui vemos que esta quantidade depende explicitamente do determinante de R, caracterizando um pseudovetor quando o determinante não for assumido igual a 1.

Já o laplaciano pode atuar tanto em vetores como em escalares, desta forma temos que o laplaciano de um escalar sob rotações é dado por

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^{2\prime}\phi' &= \overrightarrow{\nabla}'\cdot\overrightarrow{\nabla}'\phi'. \\ &= \partial_i'\partial_i'\phi'. \\ &= R_{ij}\partial_j R_{ik}\partial_k\phi \\ &= R_{ij}R_{ik}\partial_j\partial_k\phi \\ &= \delta_{jk}\partial_j\partial_k\phi \\ &= \partial_j\partial_j\phi\end{aligned} \tag{80}$$

já o laplaciano de um vetor, é um tensor de rank-1 dado que

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^{2\prime}\vec{A}_j' &= \left(\overrightarrow{\nabla}'\cdot\overrightarrow{\nabla}'\vec{A}'\right)_j \\ &= \partial_i'\partial_i'A_j' \\ &= R_{ik}\partial_k R_{il}\partial_l R_{jm}A_m \\ &= \delta_{kl}R_{jm}\partial_k\partial_l A_m \\ &= R_{jm}\partial_k\partial_k A_m.\end{aligned} \tag{81}$$