

1 Primeira aula

Thalis Girardi

thalisjg@gmail.com

Sumário

1. Introdução da notação indicial
2. O produto escalar e o δ de Kronecker
3. Rotações
4. O produto vetorial e o ε de Levi-Civita
5. Triplo produto escalar e determinantes
6. Relações entre os símbolos δ de Kronecker e ε de Levi-Civita
7. Exercícios

Requisitos dessa aula

Conhecimentos gerais sobre vetores e matrizes.

1.1 Introduzindo a notação indicial

Vamos trabalhar no espaço Euclidiano tridimensional \mathbb{E}^3 . Um vetor nesse espaço é, usualmente, representado como

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

em que A_x , A_y e A_z são as componentes do vetor. Nosso objetivo é deixar de trabalhar com o vetor e passar a trabalhar com as suas componentes, para isso precisamos introduzir uma nova notação, a notação indicial. Através dela vamos associar as componentes x , y e z do vetor a índices

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

onde A_i , com $i = 1, 2, 3$, são as componentes do vetor escritas na nova notação. Inicialmente vamos adotar um sistema de coordenadas cartesianas ou retangulares, mas posteriormente veremos que os tópicos aqui abordados também são válidos para outros sistemas de coordenadas ortogonais.

Queremos escrever todas as quantidades de interesse através da notação indicial. O sistema de coordenadas cartesianas é associado a base canônica, usualmente denotada por $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$. Na notação indicial escrevemos isso de uma maneira

genérica $\{\hat{e}_i\}$, em que o índice i determina o elemento da base estamos nos referindo:

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Nessa base, podemos escrever

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 \equiv A_i\hat{e}_i, \quad (4)$$

onde estamos introduzindo a convenção de soma de Einstein. Nessa convenção, índices repetidos denotam a presença de uma soma:

$$\sum_{i=1}^3 A_i\hat{e}_i \equiv A_i\hat{e}_i. \quad (5)$$

Índices repetidos são chamados de índices mudos e podem ser renomeados conforme for conveniente. Dizemos que estes índices estão contraídos. Os índices sem soma (livres) não podem ser renomeados.

Com isso, podemos escrever a soma de dois vetores e o produto de um número por um vetor por meio de suas componentes:

$$\left(\vec{A} + \vec{B}\right)_i = A_i + B_i, \quad (6)$$

$$\left(\alpha\vec{A}\right)_i = \alpha A_i. \quad (7)$$

1.2 O produto escalar e o δ de Kronecker

Usualmente um produto escalar é escrito como

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = A_iB_i. \quad (8)$$

Note que nesse produto aparecem apenas as componentes de mesmo índice.

Na notação indicial temos

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i\hat{e}_i \cdot B_j\hat{e}_j = A_iB_j(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j), \quad (9)$$

o que nos leva a avaliar os produtos escalares entre os vetores de base:

$$\begin{array}{lll} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = 1 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 = 0 & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = 0 \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = 1 & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_2 = 0 \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = 0 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 0 & \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = 1. \end{array}$$

Com isso vemos que esses vetores são ortogonais e tem norma (ou módulo, é o comprimento do vetor) igual a unidade. Para escrevermos isso de maneira genérica vamos introduzir o símbolo δ de Kronecker

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (10)$$

obtendo a condição de ortonormalidade

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}. \quad (11)$$

O δ_{ij} é um objeto simétrico pela troca de índices, ou seja, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$. Ele pode ser facilmente estendido para outras dimensões, uma vez que ele corresponde aos elementos da matriz identidade na dimensão escolhida, que correspondem a unidade na diagonal principal (quando $i = j$) e se anulam fora dela (quando $i \neq j$).

Das equações (8) e (9) temos

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i = A_i B_j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j). \quad (12)$$

Usando a condição de ortonormalidade obtemos

$$A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i. \quad (13)$$

Essa é uma importante propriedade do δ de Kronecker, a propriedade de contração de índices. Fazer o produto de uma quantidade qualquer por δ_{ij} , implica em fazer $i = j$.

Como o δ é simétrico, é imediato ver que o produto escalar também é

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_j \delta_{ij} = B_j A_i \delta_{ji} = \vec{B} \cdot \vec{A}. \quad (14)$$

É importante notar que as componentes de um vetor são números, em princípio, e portanto comutam, podendo ser permutadas sem qualquer problema. Sempre que tivermos índices somados podemos renomeá-los. Desse modo, pode-se renomear os índices se isso facilitar no reconhecimento de alguma quantidade (por exemplo, temos que $B_j A_i \delta_{ji} = B_i A_j \delta_{ij}$).

Vamos ver um exemplo do emprego da notação indicial para o cálculo de uma identidade:

$$\begin{aligned} (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) &= (\vec{A} - \vec{B})_i (\vec{A} + \vec{B})_i \\ &= (A_i - B_i)(A_i + B_i) \\ &= A_i A_i + A_i B_i - B_i A_i - B_i B_i \\ &= A_i A_i - B_i B_i \\ &= \vec{A} \cdot \vec{A} - \vec{B} \cdot \vec{B} \\ &= A^2 + B^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Nós denotamos o módulo de um vetor como $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = A$.

É interessante dar uma interpretação geométrica ao produto escalar. Em um caso bem específico temos

$$\vec{A} \cdot \hat{e}_1 = A_i \hat{e}_i \cdot \hat{e}_1 = A_i \delta_{i1} = A_1, \quad (16)$$

ou seja, o produto escalar de um vetor \vec{A} com o vetor unitário \hat{e}_1 filtra a componente x ($i = 1$) de \vec{A} , que é a única componente de \vec{A} paralela ao vetor \hat{e}_1 . O produto escalar $\vec{A} \cdot \hat{e}_1$ dá o que chamamos de projeção de \vec{A} na direção \hat{e}_1 .

Esse padrão é válido para qualquer produto escalar. Quando temos dois vetores arbitrários \vec{A} e \vec{B} , o produto escalar leva em conta apenas a parte paralela dos dois vetores, a projeção de um vetor na direção do outro. Escrevendo

$$\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}, \quad (17)$$

em que \vec{B}_{\parallel} é a parte de \vec{B} paralela a \vec{A} e \vec{B}_{\perp} é a parte perpendicular, temos

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B}_{\parallel}. \quad (18)$$

Seja θ o ângulo entre os dois vetores, então temos que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta, \quad (19)$$

onde A é o comprimento de \vec{A} e $B \cos \theta$ é o comprimento de \vec{B}_{\parallel} . Projetar \vec{A} na direção de \vec{B} , ou vice-versa, é equivalente, afinal o produto escalar é simétrico.

1.3 Rotações

Vamos supor que um corpo descreve uma trajetória $\vec{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ no espaço. O intervalo percorrido entre dois pontos dessa trajetória Δs é dado através da equação

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2. \quad (20)$$

Essa quantidade é uma medida de comprimento e pode ser encarada como um produto escalar. Sendo assim, se quisermos que uma medida de comprimento seja invariante, também teremos que o produto escalar é invariante frente um certo tipo de transformação (exemplos de transformações são: translação, rotação, boost, dilatação,...). Podemos nos perguntar nesse ponto qual é a transformação mais genérica que deixa o produto escalar invariante.

Na forma vetorial, a condição de invariância pode ser escrita como

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' = \vec{A} \cdot \vec{B}, \quad (21)$$

onde a "linha" indica o vetor transformado. Mas o produto escalar é avaliado exatamente da mesma forma que o produto de uma matriz linha por uma matriz coluna. Pensando assim, podemos escrever a condição de invariância na forma matricial

$$A'^T B' = A^T B. \quad (22)$$

Podemos escrever as transformações

$$\begin{cases} A \mapsto A' = RA \\ B \mapsto B' = RB \end{cases}, \quad (23)$$

em que R é uma matriz quadrada $n \times n$ que representa a transformação no espaço Euclidiano n -dimensional.

Usando essas transformações obtemos a condição

$$A^T B = A'^T B' = (RA)^T (RB) = A^T R^T R B, \quad (24)$$

que é satisfeita quando

$$R^T R = 1, \quad (25)$$

ou seja,

$$R^{-1} = R^T. \quad (26)$$

Aqui escrevemos a matriz identidade simplesmente como 1. Uma matriz que satisfaz essa condição é dita ortogonal.

Para o determinante temos

$$\det(R^T R) = \det(R^T) \det(R) = (\det R)^2 = \det(1) = 1$$

$$\det R = \pm 1. \quad (27)$$

O conjunto de matrizes ortogonais $n \times n$ recebe o nome de grupo $O(n)$, onde o O vem de ortogonal e o n é a dimensão do espaço Euclidiano. Se fixarmos o determinante como sendo a unidade temos o chamado grupo $SO(n)$, onde o S vem de *special*. Não entraremos em detalhes sobre grupos aqui. Neste momento, basta imaginar que estamos tratando com um conjunto de matrizes (ortogonais e com determinante igual a unidade) que satisfazem uma série de propriedades bem definidas. Com isso, mostramos que a transformação mais genérica que mantém o produto escalar invariante no espaço Euclidiano é uma transformação ortogonal.

Vamos examinar o caso bidimensional com mais detalhe. Podemos escrever para a matriz R de modo genérico

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \quad (28)$$

A inversa dessa matriz vale

$$R^{-1} = \frac{1}{\det R} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Usando a condição de ortogonalidade e o determinante igual a unidade podemos estabelecer relações entre as componentes da matriz:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = R^T, \quad (30)$$

portanto

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (31)$$

obedece a condição

$$\det R = \alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (32)$$

Uma parametrização possível, que satisfaz essas condições é

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (33)$$

que é uma matriz de rotação genérica para o caso bidimensional. Na próxima aula entenderemos melhor porque essa é uma matriz de rotação. No caso tridimensional teríamos três rotações possíveis, uma em torno de cada eixo.

Sendo assim, no espaço Euclidiano, a transformação mais genérica que deixa o produto escalar invariante é a rotação. Lembrando que, por enquanto, estamos nos restringindo ao caso em que o determinante é positivo.

1.4 O produto vetorial e o ε de Levi-Civita

Usualmente o produto vetorial é escrito sobre a forma de um determinante

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \quad (34)$$

Isso é exclusivo para o caso tridimensional, que é o caso em questão. O produto vetorial é um produto cruzado, que mistura as componentes de índices diferentes como em $A_i B_j - A_j B_i$. Em outras dimensões ele não é um vetor e não pode ser expresso em termos de um determinante. Como exemplo, no caso bidimensional, ele vale simplesmente $\vec{A} \times \vec{B} = A_1 B_2 - A_2 B_1$.

Na notação indicial o produto vetorial fica

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_i \hat{e}_i \times B_j \hat{e}_j = A_i B_j (\hat{e}_i \times \hat{e}_j), \quad (35)$$

o que nos leva a avaliar os produtos vetoriais entre os vetores de base:

$$\begin{array}{lll} \hat{e}_1 \times \hat{e}_1 = 0 & \hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_3 & \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \\ \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 & \hat{e}_2 \times \hat{e}_2 = 0 & \hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_1 \\ \hat{e}_1 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_2 & \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1 & \hat{e}_3 \times \hat{e}_3 = 0. \end{array}$$

Daqui tiramos que: para índices iguais o produto se anula, para índices diferentes obtemos como resultado o vetor unitário perpendicular ao plano formado por $\hat{e}_i \times \hat{e}_j$. O sinal desse vetor é positivo para permutações pares dos índices 123 e negativo para permutações ímpares. Para escrevermos isso de maneira genérica vamos introduzir o ε de Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1, & \text{para permutações pares de } \varepsilon_{123} \\ -1, & \text{para permutações ímpares de } \varepsilon_{123} \\ 0, & \text{quando há repetição de índices} \end{cases} \quad (36)$$

Ele é um objeto totalmente antissimétrico na troca dos índices, isto é, se permutarmos um índice uma única vez há uma mudança de sinal ($\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$), se permutarmos duas vezes o sinal permanece igual ($\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$), e assim por diante.

Diferentemente do δ de Kronecker, o ε não tem um formato geral para uma dimensão arbitrária D . Nesse caso, ele deve ser definido como um objeto totalmente antissimétrico com D índices.

Com essa definição, temos para o produto vetorial entre vetores unitários

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad (37)$$

e para um produto vetorial genérico

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_i B_j \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k, \quad (38)$$

que também pode ser expresso em termos de suas componentes

$$\left(\vec{A} \times \vec{B} \right)_k = \varepsilon_{kij} A_i B_j. \quad (39)$$

Pela antissimetria do ε é imediato que

$$\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} A_i B_j = \varepsilon_{jik} B_j A_i = -\vec{B} \times \vec{A}. \quad (40)$$

Diferentemente dos casos em que estamos acostumados, o produto vetorial não comuta. Não podemos trocar os vetores de posição sem pagar um preço por isso.

Para exemplificar, podemos olhar para o produto $(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B})$, cujas componentes são

$$\begin{aligned} \left[(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) \right]_i &= \varepsilon_{ijk} (\vec{A} - \vec{B})_j (\vec{A} + \vec{B})_k \\ &= \varepsilon_{ijk} (A_j - B_j) (A_k + B_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} A_j A_k - \varepsilon_{ijk} B_j B_k + \varepsilon_{ijk} A_j B_k - \varepsilon_{ijk} B_j A_k \end{aligned}$$

Aqui os termos do tipo $\varepsilon_{ijk} A_j A_k$ e $\varepsilon_{ijk} B_j B_k$ se anulam por serem o produto de uma quantidade simétrica na troca de índices por uma quantidade antissimétrica

$$\vec{A} \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk} A_j A_k = \varepsilon_{ijk} A_k A_j = -\varepsilon_{ikj} A_k A_j = -\vec{A} \times \vec{A} = 0.$$

Reconhecer esse tipo de produto em equações pode simplificar significativamente as contas. Voltando para o produto, temos

$$\begin{aligned} \left[(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) \right]_i &= \varepsilon_{ijk} A_j B_k - \varepsilon_{ijk} A_k B_j \\ &= \varepsilon_{ijk} A_j B_k - \varepsilon_{ikj} A_k B_j \\ &= 2\varepsilon_{ijk} A_j B_k \\ &= 2 \left(\vec{A} \times \vec{B} \right)_i. \end{aligned}$$

Voltando para a notação vetorial

$$(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = 2(\vec{A} \times \vec{B}). \quad (41)$$

De maneira análoga ao produto escalar, queremos interpretar geometricamente o produto vetorial $\vec{A} \times \vec{B}$. Esse produto filtra apenas as componentes perpendiculares dos vetores. Se escrevermos o vetor \vec{B} como (17), então temos que

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}_\perp. \quad (42)$$

Como o comprimento de \vec{B}_\perp é $B \sin \theta$, temos

$$\left| \vec{A} \times \vec{B} \right| = AB \sin \theta. \quad (43)$$

Essa é exatamente a área de um paralelogramo definido pelos vetores \vec{A} e \vec{B} . Imagine que temos o vetor \vec{A} formando a base e o topo do paralelogramo, enquanto o vetor \vec{B} forma as laterais. Este paralelogramo tem base de comprimento A e as laterais de comprimento $B \sin \theta$. Com isso, a área é dada por $AB \sin \theta$. É interessante notar que estamos falando de um vetor, o que sugere que a área também seja vista como um vetor. A direção desse vetor é perpendicular a superfície e deve ser especificada para que se conheça exatamente qual é a área.

1.5 Triplo produto escalar e determinantes

Olhando para as componentes do triplo produto escalar

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= A_i (\vec{B} \times \vec{C})_i \\ &= A_i (\varepsilon_{ijk} B_j C_k) \\ &= (\varepsilon_{ijk} A_i B_j) C_k \\ &= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}), \end{aligned} \quad (44)$$

vemos que podemos trocar os produtos escalar e vetorial de posição.

Além disso, de acordo com as propriedades do símbolo de Levi-Civita, obtemos as relações entre as permutações pares de ABC

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} \quad (45)$$

e entre as ímpares

$$\vec{C} \cdot \vec{B} \times \vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} \times \vec{B}, \quad (46)$$

sendo que elas se associam entre si através da troca de sinal

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = -\vec{C} \cdot \vec{B} \times \vec{A}. \quad (47)$$

É interessante notar também que, na notação usual

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3) \cdot \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & D_2 & E_3 \end{vmatrix}. \quad (48)$$

Se abrirmos o determinante temos algo do tipo

$$(A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3) \cdot \left[(\vec{B} \times \vec{C})_1 \hat{e}_1 + (\vec{B} \times \vec{C})_2 \hat{e}_2 + (\vec{B} \times \vec{C})_3 \hat{e}_3 \right],$$

entretanto, no produto escalar, apenas componentes de mesmo índice são não nulas, temos

$$A_1 \hat{e}_1 \cdot (\vec{B} \times \vec{C})_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 \cdot (\vec{B} \times \vec{C})_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3 \cdot (\vec{B} \times \vec{C})_3 \hat{e}_3,$$

mas isso é equivalente a colocar as componentes do vetor \vec{A} na primeira linha do determinante:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}. \quad (49)$$

Definindo $a_{1i} \equiv A_i$, $a_{2i} \equiv B_i$ e $a_{3i} \equiv C_i$, temos

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (50)$$

o que nos sugere que o determinante de uma matriz arbitrária M possa ser escrito em termos do ε de Levi-Civita

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}. \quad (51)$$

Daqui tiramos propriedades como a de que a troca de duas linhas do determinante produz uma mudança de sinal. Se fizermos os índices que estão fixos variarem também, vemos que eles também são associados ao ε por causa de suas propriedades:

$$\varepsilon_{lmn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_{li} a_{mj} a_{nk}. \quad (52)$$

Se definirmos um paralelepípedo, cuja base é o paralelogramo descrito por \vec{B} e \vec{C} e cuja lateral é dada por \vec{A} , então o produto $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ resulta em seu volume. No caso dos vetores de base podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k) &= \hat{e}_i \cdot \varepsilon_{jkl} \hat{e}_l \\ &= \varepsilon_{jkl} \delta_{il} \\ &= \varepsilon_{ijk}. \end{aligned} \quad (53)$$

Isso define o que chamamos de regra da mão direita, portanto o sistema de coordenadas é dito dextrógiro. Se o resultado fosse negativo teríamos a regra da mão esquerda e o sistema de coordenadas seria levógiro. Os vetores unitários são

definidos de forma que sigam a regra da mão direita, pois assim o volume nesse sistema de coordenadas é positivo:

$$\hat{e}_1 \cdot (\hat{e}_2 \times \hat{e}_3) = 1. \quad (54)$$

1.6 Relações entre os símbolos δ de Kronecker e ε de Levi-Civita

Vamos olhar para as componentes do produto $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$:

$$\begin{aligned} \left[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \right]_i &= \varepsilon_{ijk} A_j (\vec{B} \times \vec{C})_k \\ &= \varepsilon_{ijk} A_j \varepsilon_{klm} B_l C_m \\ &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} A_j B_l C_m. \end{aligned}$$

É possível escrevermos o produto de dois ε 's de Levi-Civita em termos de δ 's de Kronecker. Para essa identidade usamos

$$\varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (55)$$

Vamos tomar ela como sendo verdade por enquanto, posteriormente entraremos em detalhes sobre essa relação e outras do tipo. Temos

$$\begin{aligned} \left[\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \right]_i &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m \\ &= A_j B_i C_j - A_j B_j C_i \\ &= B_i (\vec{A} \cdot \vec{B}) - C_i (\vec{A} \cdot \vec{B}). \end{aligned} \quad (56)$$

Voltando para a forma vetorial

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{B}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}). \quad (57)$$

Quando falamos de vetores, essa é uma das identidades mais utilizadas e por isso serve como uma "propaganda" positiva para a notação. Uma pessoa, com certo domínio no uso da notação indicial, pode encontrar esse resultado em três ou quatro linhas. Tradicionalmente, esse resultado é obtido pela multiplicação explícita dos vetores, isto é, primeiro calculamos o determinante

$$\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

e usamos o resultado nesse segundo determinante

$$\begin{vmatrix} \widehat{e}_1 & \widehat{e}_2 & \widehat{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_2C_3 - B_3C_2 & B_3C_1 - B_1C_3 & B_1C_2 - B_2C_1 \end{vmatrix}.$$

Comparando os dois casos fica evidente a simplificação obtida quando se trabalha com a notação indicial.

Vamos voltar para as relações entre os ε 's e δ 's. Vamos deduzir essas relações para o caso do espaço Euclidiano bidimensional \mathbb{E}^2 , em que o símbolo de Levi-Civita possui apenas dois índices, ε_{ij} . Vamos começar pelo produto $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$. Pelas propriedades do ε , sabemos que $i \neq j$ e $k \neq l$. Levando em conta todas as permutações possíveis de índices temos a combinação

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = a\delta_{ik}\delta_{jl} + b\delta_{il}\delta_{jk}. \quad (58)$$

É necessário que tenhamos os mesmos índices em todos os termos da equação, isso garante que temos o mesmo tipo de objeto em todos os termos (por exemplo, podemos igualar vetores apenas a vetores).

Fazendo $i = j$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= a\delta_{ik}\delta_{il} + b\delta_{il}\delta_{ik} \\ &= (a + b)\delta_{ik}\delta_{il}, \end{aligned}$$

de onde tiramos a condição de que $b = -a$, portanto

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = a(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (59)$$

Fazendo $k = l$ chegaríamos na mesma conclusão.

Olhando para uma das possibilidades não nulas podemos fixar o parâmetro a

$$\varepsilon_{12}\varepsilon_{12} = 1 = a. \quad (60)$$

Usando as outras possibilidades não nulas ($\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}$, $\varepsilon_{21}\varepsilon_{12}$ e $\varepsilon_{21}\varepsilon_{21}$) chegamos ao mesmo resultado. Por fim, temos a primeira propriedade, que pode ser identificada a um determinante

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix}. \quad (61)$$

Agora se contrairmos os índices i e k , temos

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{il} = S \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{jl} \end{vmatrix} = \delta_{jl}. \quad (62)$$

Usamos um fator de simetria S , que vem da soma em i . Imagine que j e l são índices fixos, nesse caso há uma única possibilidade para o índice i .

Se contrairmos j com l , temos

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = S \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2!. \quad (63)$$

O fator de simetria é dois porque temos dois índices repetidos. Existem dois valores acessíveis para o índice i , mas após ele ser fixado existe uma única possibilidade para j , com isso o fator de simetria é $S = 2.1 = 2!$.

Agora vamos voltar para o \mathbb{E}^3 . A ideia é escrevermos o produto $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}$ em termos de todas as combinações possíveis entre os δ 's. Deve-se lembrar que ambos os lados da equação contém, obrigatoriamente, a mesma estrutura de índices. Várias possibilidades se anulam devido as propriedades de simetria do ε e do δ . Por fim, usando as condições necessárias, obtem-se o determinante

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}. \quad (64)$$

Outras identidades são obtidas através da contração de índices. Para todos os índices contraídos, temos

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = S \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3!. \quad (65)$$

Aqui podemos ver melhor a origem do fator de simetria. Temos três possibilidades para o índice i , quando ele está fixo restam duas para o j e então resta só uma para o k : $S = 3.2.1 = 3!$.

No exercício 4 vamos encontrar essas identidades para os casos tri e quadridimensional e então vamos generalizar esse resultado para o espaço Euclidiano n -dimensional.

1.7 Exercícios

1. Calcule as seguintes identidades

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad (66)$$

$$(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = A^2 - B^2 \quad (67)$$

$$(\vec{A} - \vec{B}) \times (\vec{A} + \vec{B}) = 2\vec{A} \times \vec{B} \quad (68)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{C} \cdot \vec{B} \times \vec{A} \quad (69)$$

$$\vec{C} \cdot \vec{B} \times \vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} \times \vec{B} \quad (70)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} \quad (71)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (72)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \quad (73)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0 \quad (74)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) (\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D}) (\vec{B} \cdot \vec{C}) \quad (75)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C} + d\vec{D} \quad (76)$$

2. O momento angular de uma partícula é dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$, onde \vec{p} é o momento linear. Com velocidades linear e angular relacionadas por $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, mostre que

$$\vec{L} = mr^2 [\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \hat{r}_0) \hat{r}_0] \quad (77)$$

Aqui, \hat{r}_0 é um vetor unitário na direção radial. Para $\vec{\omega} \cdot \hat{r} = 0$ isso se reduz a $\vec{L} = mr^2 \vec{\omega} = I\vec{\omega}$, onde I é o momento de inércia.

3. A energia cinética de uma única partícula é dada por $T = \frac{1}{2}mv^2$. Para o movimento de rotação, essa expressão se transforma em $\frac{1}{2}m(\vec{\omega} \times \vec{r})^2$. Mostre que

$$T = \frac{1}{2}m \left[r^2 \omega^2 - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})^2 \right]. \quad (78)$$

Para $\vec{r} \cdot \vec{\omega} = 0$ essa expressão se reduz a $T = \frac{1}{2}I\omega^2$, com o momento de inércia I dado por mr^2 .

4. Encontre as relações entre os símbolos ε de Levi-Civita e δ de Kronecker para três e quatro dimensões. Generalize para o caso D -dimensional.

Os exercícios 2 e 3 foram tirados do livro do Arfken, cuja referência foi passada.