Lista de exercícios II - Operadores diferenciais

Parte I - geral

Seja ϕ um campo escalar, $\overrightarrow{A}$ e $\overrightarrow{B}$ campos vetoriais e $\overrightarrow{r}$ o vetor posição, então prove as identidades

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{A} \times \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{A}\right)^2 - \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{A} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{A}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B}\right) + \left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}\right) + \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{B} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right), \text{ se } \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0 \text{ e } \overrightarrow{B} \text{ é constante} \tag{4}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{r}\right) = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}, \text{ se } \overrightarrow{A} \text{ e } \overrightarrow{B} \text{ são constantes} \tag{5}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}\right) - \nabla^2\overrightarrow{A} \tag{6}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = 0 \tag{7}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla}\phi = 0 \tag{8}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{A} \times \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B}\right) + \overrightarrow{B} \times \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right) + \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{B} + \left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{A} \tag{9}$$

Parte II - Eletromagnetismo

A força $\overrightarrow{F}$ associada ao momento de dipólo magnético $\overrightarrow{m}$ (que é constante) vale

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{m}\right)$$

Seja $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0$, então prove que

$$\overrightarrow{F} = \left(\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{B}\right) \tag{10}$$

Seja o potencial escalar

$$\phi = \frac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

onde o momento de dipólo $\overrightarrow{p}$ é constante, então mostre que o campo elétrico vale

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\hat{r}_0\left(\hat{r}_0 \cdot \overrightarrow{p}\right) - \overrightarrow{p}}{\left|\overrightarrow{r}\right|^3} \tag{11}$$

Seja o potencial vetor para um campo dipolar

$$\overrightarrow{A} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{r}}{\left|\overrightarrow{r}\right|^3}$$

então prove que o campo magnético associado vale

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{3\hat{r}_0\left(\hat{r}_0 \cdot \overrightarrow{m}\right) - \overrightarrow{m}}{\left|\overrightarrow{r}\right|^3} \tag{12}$$

Prove que

$$\overrightarrow{F} = q\left[-\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} + \overrightarrow{v} \times \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right)\right] = q\left[-\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{d\overrightarrow{A}}{dt} + \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{A}\right)\right] \tag{13}$$

Parte III - Mecânica Quântica

O momentum angular é defininido como $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}$. Seja $\overrightarrow{p} \equiv -i\hbar\overrightarrow{\nabla}$, onde $\hbar$ é a constante de Planck. Prove que

$$[L_j, L_k] = L_j L_k - L_k L_j = i\varepsilon_{ijk} L_i \tag{14}$$

$$\overrightarrow{L} \times \overrightarrow{L} = i\overrightarrow{L} \tag{15}$$

Prove que

$$\left(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{\nabla}\right) \cdot \left(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{\nabla}\right)\Psi = r^2\nabla^2\Psi - r^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - 2r\frac{\partial\Psi}{\partial r} \tag{16}$$

Mostre que

$$\left(\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A}\right) \times \left(\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A}\right)\Psi = ie\overrightarrow{B}\Psi \tag{17}$$

onde e é a carga eletrônica, $\overrightarrow{A}$ é o potencial vetor, $\overrightarrow{B}$ é o campo magnético e Ψ é a função de onda.