1) Mostre que se $\overrightarrow{B}$ é um vetor constante, e $\overrightarrow{A}$ é irrotacional,

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} = 0$$

e solenoidal

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0$$

então

$$\overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right) \tag{1}$$

2. a) A equação de Navier-Stokes da Hidrodinâmica contém um termo não linear $\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{v}$. Mostre que o rotacional deste termo pode ser escrito como

$$-\overrightarrow{\nabla} \times \left[\overrightarrow{v} \times \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{v}\right)\right] = \overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{v}. \tag{2}$$

b) Mostre que isto significa que

$$\overrightarrow{v} \times \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{v}\right) = -\left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{v} \tag{3}$$

3) Se um campo vetorial $\overrightarrow{F}$ depende de x, y, z e t mostre que

$$d\overrightarrow{F} = \left(d\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{F} + dt\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial t} \tag{4}$$

4) Na teoria de Pauli para o elétron nós encontramos a expressão

$$\left(\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A}\right) \times \left(\overrightarrow{p} - e\overrightarrow{A}\right)\boldsymbol{\Psi} \tag{5}$$

onde Ψ é uma função escalar, $\overrightarrow{A}$ é o potencial vetor associado ao campo magnético $\overrightarrow{B}$ dado por $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$.

Temos que $\overrightarrow{p} = -i\overrightarrow{\nabla}$, mostre que a expressão acima se reduz a $ie\overrightarrow{B}\Psi$.