Exercícios - Aula 3

1. Sejam as relações entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas polares cilíndricas

$$x = \rho \cos\theta, \tag{1}$$
$$y = \rho \sin\theta, \tag{2}$$
$$z = z, \tag{3}$$

com $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$ e $-\infty < \rho < \infty$, então:

a) Encontre as transformações inversas;

b) Descreva as superfícies associadas a cada uma das coordenadas constantes;

c) Encontre os vetores unitários perpendiculares à essas superfícies e os fatores de escala;

d) Escreva os vetores unitários cartesianos em função da nova base;

e) Obtenha expressões para os elementos diferencias e para os operadores diferenciais em termos dosfatores de escala e da nova base;

f) Determine a velocidade e a aceleração nesse novo sistema;

2. Mostre que a equação

$$\nabla^2 V(r,\theta,\varphi) + \left[k^2 + f(r) + \frac{g(\theta)}{r^2} + \frac{h(\varphi)}{r^2 \sin^2\theta}\right] = 0 \tag{4}$$

é separável. O que acontece com o laplaciano $\nabla^2 V$ quando fazemos $r \to 0$?

3. Mostre que, em coordenadas esféricas, o rotacional pode ser escrito como

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \widehat{r}_0 & r\widehat{\theta}_0 & r\sin\theta\widehat{\varphi}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}. \tag{5}$$

4. Calcule a velocidade e a aceleração em coordenadas esféricas.