Exercícios

1. Calcule as seguintes identidades

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = -\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A} \tag{2}$$

$$\left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\right) \cdot \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right) = A^2 - B^2 \tag{3}$$

$$\left(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\right) \times \left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right) = 2\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \tag{4}$$

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = -\overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A} \tag{5}$$

$$\overrightarrow{C} \cdot \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C} \times \overrightarrow{B} \tag{6}$$

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C} \tag{7}$$

$$\overrightarrow{A} \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}\right) = \overrightarrow{B} \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}\right) - \overrightarrow{C} \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right) \tag{8}$$

$$\left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) \cdot \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) = A^2 B^2 - \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}\right)^2 \tag{9}$$

$$\overrightarrow{A} \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{C}\right) + \overrightarrow{B} \times \left(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{A}\right) + \overrightarrow{C} \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) = 0 \tag{10}$$

$$\left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) \cdot \left(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}\right) = \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C}\right) \left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{D}\right) - \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{D}\right) \left(\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{C}\right) \tag{11}$$

$$\left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) \times \left(\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{D}\right) = a\overrightarrow{A} + b\overrightarrow{B} + c\overrightarrow{C} + d\overrightarrow{D} \tag{12}$$

2. O momento angular de uma partícula é dado por $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} = m\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v}$, onde $\overrightarrow{p}$ é o momento linear. Com velocidades linear e angular relacionadas por $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$, mostre que

$$\overrightarrow{L} = mr^2 \left[\overrightarrow{\omega} - \left(\overrightarrow{\omega} \cdot \hat{r}_0\right) \hat{r}_0\right] \tag{13}$$

Aqui, $\hat{r}_0$ é um vetor unitário na direção radial. Para $\overrightarrow{\omega} \cdot \hat{r} = 0$ isso se reduz a $\overrightarrow{L} = mr^2\overrightarrow{\omega} = I\overrightarrow{\omega}$, onde I é o momento de inércia.

3. A energia cinética de uma única partícula é dada por $T = \frac{1}{2}mv^2$. Para o movimento de rotação, essa expressão se transforma em $\frac{1}{2}m\left(\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}\right)^2$. Mostre que

$$T = \frac{1}{2}m\left[r^2\omega^2 - \left(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\omega}\right)^2\right]. \tag{14}$$

Para $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\omega} = 0$ essa expressão se reduz a $T = \frac{1}{2}I\omega^2$, com o momento de inércia I dado por mr^2.

4. Encontre as relações entre os símbolos ε de Levi-Civita e δ de Kronecker para três e quatro dimensões. Generalize para o caso D-dimensional.

Os exercícios 2 e 3 foram tirados do livro do Arfken, que está na bibliografia.