Teorias de calibre via equações de Maxwell

Gustavo P. de Brito e José Helayël-Neto

Nesse conjunto de notas nós vamos fazer uma introdução às chamadas teorias de calibre. Começaremos a nossa discussão com alguns aspectos interessantes da eletrodinâmica de Maxwell e em seguida discutiremos algumas características importantes da eletrodinâmica massiva de Proca. Por fim, vamos fazer uma introdução às teorias de calibre a partir do estudo da interação eletromagnética de partículas massivas descritas por uma campo escalar.

I. ELETRODINÂMICA DE MAXWELL:

Como é bem sabido, a forma mais usual de se descrever os fenômenos eletromagnéticos se dá em termos da eletrodinâmica de Maxwell. Com efeito, essa bela teoria formulada em meados do século XIX tem sido muito bem sucedida na descrição de uma série de fenômenos naturais e consiste em um dos alicerces do nosso conhecimento sobre a natureza [1, 2].

A. Das equações de Maxwell às ondas eletromagnéticas:

De forma geral, a eletrodinâmica (maxwelliana ou não) lida com a interação entre objetos (partículas) que possuem *cargas*. Nesse contexto, a interação entre objetos carregados se dá em termos de um campo elétrico $\mathbf{E}$ e de um campo magnético $\mathbf{B}$. Essencialmente, esses campos consistem em funções vetoriais que dependem de pontos do espaço e do tempo, isto é

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t). \tag{1}$$

Por sua vez, a evolução dinâmica desses campos se dá em termos de equações de movimento e depende da distribuição de cargas no espaço-tempo. No contexto da eletrodinâmica de Maxwell, a dinâmica dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ é descrita em termos do seguinte conjunto de equações

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2b}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{2c}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{2d}$$

onde $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ representam, respectivamente, as densidades de carga e corrente, ϵ_0 representa a *permissividade elétrica do vácuo*, enquanto μ_0 denota a *permeabilidade magnética do vácuo*. Além disso, como as equações que descrevem a dinâmica de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ não são independentes, nós podemos dizer que a variação do campo elétrico atua como fonte para o campos magnético e vice-versa.

Em contrapartida, classicamente os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ atuam sobre a dinâmica de partículas carregadas por meio da chamada *força de Lorentz*. Nesse contexto, para uma partícula de carga q_e, se movendo com velocidade $\mathbf{v}$, podemos escrever a seguinte expressão

$$\mathbf{F} = q_e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{3}$$

Adicionalmente, em termos ρ e $\mathbf{J}$ nós podemos escrever a *densidade de força de Lorentz*

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \tag{4}$$

Talvez seja lícito dizer que a principal realização de Maxwell em todo o seu trabalho sobre a interação eletromagnética, tenha sido unificação da ótica ondulatória com os fenômenos eletromagnéticos. De fato, os trabalhos de Maxwell foram fundamentais para a nossa compreensão de que a luz se propaga como uma onda eletromagnética. Vejamos abaixo como extrair esse resultado a partir das equações de Maxwell. Para isso, vamos reescrever as equações (2a)-(2d) na ausência de cargas e correntes ($\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$), a saber

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{5a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{5b}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{5c}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{5d}$$

Tomando o rotacional das equações (5c) e (5d) nós obtemos o seguinte par de equações

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}), \tag{6a}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}). \tag{6b}$$

Substituindo as equações (5c) e (5d), respectivamente, nas equações (6b) e (6a), obtemos os seguintes resultados

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \tag{7a}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \tag{7b}$$

Levando em conta a seguinte identidade do cálculo vetorial

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{A}, \tag{8}$$

válida para qualquer campo vetorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, podemos reescrever as equações (7a) e (7b) da seguinte forma

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \tag{9a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \tag{9b}$$

Finalmente, utilizando as equações (5a) e (5b), nós podemos anular os primeiros termos das duas últimas equações. Assim, chegamos aos seguintes resultados

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{E} = 0, \tag{10a}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{B} = 0. \tag{10b}$$

Até este ponto o que nós fizemos foram apenas manipulações matemáticas que nos permitiram desacoplar um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem em termos de equações de segunda ordem. No entanto, as duas equações acima possuem um significado físico muito profundo. Como nós sabemos, a propagação de uma onda é caracterizada por uma função $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ que representa a amplitude de oscilação em cada ponto do espaço e em cada instante de tempo. Além disso, $\psi(\mathbf{x}, t)$ satisfaz à chamada equação de onda

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 \psi = 0, \tag{11}$$

onde v representa a velocidade de propagação em uma dado meio. Desse modo, comparando as equações (10) e (11) nós podemos interpretar os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ como uma *onda eletromagnética* se propagando no vácuo com velocidade $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$. O resultado acima se torna ainda mais surpreendente quando nós consideramos os valores ϵ_0 e μ_0, a saber

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C}^2/\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2, \tag{12a}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N}/\mathrm{A}^2. \tag{12b}$$

Utilizando os valores expostos acima, obtemos o seguinte resultado

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \approx 2,99 \times 10^8\ \mathrm{m/s}, \tag{13}$$

que corresponde à velocidade de propagação da luz no vácuo. Desse modo, nós podemos interpretar a natureza ondulatória da luz em termos da propagação de uma onda eletromagnética. Por uma questão de completeza, podemos reescrever as equações (10a) e (10b) da seguinte forma

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{E} = 0, \tag{14a}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{B} = 0, \tag{14b}$$

onde c representa a constante de *velocidade da luz* no vácuo que pode ser calculada a partir da equação

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}. \tag{15}$$

B. Leis de conservação:

Uma consequência que pode ser obtida de forma direta das equações de Maxwell diz respeito à conservação da carga elétrica. De fato, tomando a derivada temporal da equação (2a) e a divergência de (2d), obtemos as seguintes equações

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{16a}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) = \mu_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}). \tag{16b}$$

Combinando as duas equações acima, podemos escrever

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}). \tag{17}$$

Além disso, lembrando da seguinte identidade do cálculo vetorial

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = 0, \tag{18}$$

válida para qualquer campo vetorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, podemos escrever a seguinte equação

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{19}$$

As equações que se encaixam na forma acima são conhecidas como *equações de continuidade* e estão associadas com a conservação de alguma quantidade. Nesse caso em particular, a equação de continuidade obtida acima está associada com a conservação da carga elétrica. De fato, integrando a equação em uma região espacial de volume V, nós obtemos o seguinte resultado

$$\int_V d^3x \, \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\int_V d^3x \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}, \tag{20}$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \rho = -\int_V d^3x \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}. \tag{21}$$

Lembrando que a carga elétrica contida nessa região de volume V pode ser calculada como a integral sobre a densidade de carga, isto é

$$Q = \int_V d^3x \rho. \tag{22}$$

Portanto, podemos escrever

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_V d^3x \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}. \tag{23}$$

Recordemos ainda o chamado teorema de Gauss, que relaciona a integral volumétrica da divergência de um campo vetorial com fluxo do mesmo sobre uma superfície que delimita a fronteira dessa região, a saber

$$\int_V d^3x \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = \int_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}, \tag{24}$$

onde ∂V representa a fronteira da região espacial de volume V e $d\boldsymbol{\Sigma}$ denota uma elemento de área orientado na direção normal à superfície de integração. Desse modo, podemos reescrever a equação (23) da seguinte forma

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_{\partial V} \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}. \tag{25}$$

A equação acima implica que a variação da quantidade de carga em uma região de volume V corresponde ao fluxo de carga sobre a fronteira ∂V. De forma mais heurística, qualquer mudança no valor da quantidade de cargas dentro da região de volume V deve ser compensada por cargas atravessando a fronteira ∂V.

Além dos resultados obtidos acima, nós podemos extrair outras leis de conservação a partir das equações de Maxwell. Em especial, realizando uma série de manipulações com as equações de Maxwell, pode-se deduzir os seguinte resultados

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}, \tag{26a}$$

e

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \tag{26b}$$

onde nós definimos

$$u_{em} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2\right), \tag{27a}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \tag{27b}$$

e

$$(\overleftrightarrow{\mathbf{T}})_{ij} = \epsilon_0\left(\mathbf{E}_i\mathbf{E}_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbf{E}^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\mathbf{B}_i\mathbf{B}_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbf{B}^2\right) \tag{27c}$$

As equações acima merecem algumas explicações:

- As equações (26a) e (26b) representam equações de continuidade inomogêneas e, portanto, devem estar associadas com alguma lei de conservação.

- O termo $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$, presente no lado direito da equação (26a), pode ser identificado como sendo a taxa de variação de trabalho por unidade de volume. Desse modo, podemos identificar a equação (26a) como sendo uma equação de conservação de energia. Além disso, podemos interpretar o termo u_{em} como sendo a densidade associada com o campo eletromagnético.

- A fim de dar uma interpretação para o vetor $\mathbf{S}$, denominado vetor de Poynting, vamos fazer $\mathbf{J} = 0$ e realizar a integração da equação (26a) em uma região espacial de volume V, nesse caso, obtemos o seguinte resultado (após o uso do teorema de Gauss)

$$\frac{dU_{em}}{dt} = -\int_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}, \tag{28}$$

onde nós definimos a energia associada ao campo eletromagnético como sendo (em uma região espacial de volume V)

$$U_{em} = \int_V d^3x\, u_{em}. \tag{29}$$

Desse modo, podemos associar o vetor de Poynting com uma quantidade de energia por unidade de área e por unidade de tempo fluindo em uma dada direção espacial.

- O termo $\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ que aparece no lado direito da equação (26b) pode ser identificado com a densidade de força de Lorentz. Por sua vez, esse termo corresponde a taxa de variação temporal de *momentum*, por unidade de volume, experimentada por partículas carregadas ao interagirem com o campo eletromagnético. Desse modo, a equação (26b) pode ser interpretada como uma equação de conservação de *momentum*. Além disso, podemos identificar o termo

$$\boldsymbol{\varrho}_{em} \equiv \frac{1}{c^2}\mathbf{S} \tag{30}$$

como a sendo a densidade de *momentum* associada com o campo eletromagnético. Desse modo, podemos escrever o *momentum* associado ao campo eletromagnético, em uma região de volume V, da seguinte forma

$$\mathbf{p}_{em} = \int d^3x\, \frac{1}{c^2}\mathbf{S} \tag{31}$$

- Finalmente, a fim de interpretar o chamado *tensor das tensões de Maxwell*, $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$, vamos considerar $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$ e realizar a integração volumétrica da equação (26b). Nesse caso, obtemos o seguinte resultado (já feito o uso do teorema de Gauss)

$$\frac{d\mathbf{p}_{em}}{dt} = \int_{\partial V} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{\Sigma}. \tag{32}$$

A equação acima nos diz que a variação temporal do *momentum* associado ao campo eletromagnético corresponde ao fluxo de $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ sobre a superfície ∂V. Desse modo, tendo em mente a segunda lei de Newton, podemos associar $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ com a força por unidade de área, ou seja, a *tensão* que o campo eletromagnético exerce sobre um elemento de área.

C. Potenciais e simetria de calibre:

Como nós vimos anteriormente, toda a descrição da interação eletromagnética (ao nível clássico) pode ser feita em termos dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. A dinâmica desses campos é regida pelas equações de

Maxwell e, por sua vez, os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ atuam sobre a dinâmica de partículas carregadas por meio da força de Lorentz. No entanto, como nós veremos abaixo, nós podemos escrever os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ em termos dos chamados *campos potenciais* $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$. A fim de introduzir tais objetos, vamos considerar as equações de Maxwell homogêneas, ou seja, aquelas que não dependem de fontes, a saber

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{33a}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \tag{33b}$$

Primeiramente, como nós sabemos do cálculo vetorial, um campo que possui divergência nula em todo espaço, como é o caso do campo magnético, pode ser escrito como o rotacional de um campo vetorial. Assim, podemos escrever

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}. \tag{34}$$

Substituindo a expressão acima em (33b), obtemos

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \tag{35}$$

Por sua vez, como também sabemos do cálculo vetorial, que um campo cujo rotacional é nulo em todo espaço, como é o caso da combinação $\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}$, pode ser escrito em termos do gradiente de uma função escalar. Portanto, podemos escrever[1]

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\phi. \tag{36}$$

Desse modo, conseguimos expressar o os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ em termos de um potencial escalar ϕ e de um potencial vetorial $\mathbf{A}$, a saber

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \tag{37a}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \tag{37b}$$

De posse dos resultados acima, nós podemos reescrever as equações de Maxwell inomogêneas em termos dos campos potenciais. Com efeito, substituindo (37a) e (37b) nas equações (2a) e (2d), nós obtemos os seguintes resultados

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{38a}$$

[1] O sinal negativo é apenas uma convenção e não possui nenhum significado físico.

e

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \tag{38b}$$

Após algumas manipulações envolvendo o uso da identidade $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, podemos reescrever as equações acima da seguinte forma

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \tag{39a}$$

e

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{39b}$$

Retornemos agora às equações (37a) e (37b). Como nós podemos observar, existe uma ambiguidade na definição dos potenciais, isto é, para uma dada configuração de campo eletromagnético, os potenciais ϕ e $\mathbf{A}$ não são unicamente definidos. Com efeito, consideremos as transformações

$$\phi(\mathbf{x}, t) \;\mapsto\; \phi'(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \tag{40a}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \;\mapsto\; \mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \nabla \alpha(\mathbf{x}, t), \tag{40b}$$

onde $\alpha(\mathbf{x}, t)$ representa uma função escalar suave. Nós podemos verificar que as transformações definidas não alteram os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, a saber

$$\mathbf{E} \;\mapsto\; \mathbf{E}' = -\nabla \phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla \left(\phi + \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \Big(\mathbf{A} - \nabla \alpha \Big) = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}, \tag{41a}$$

e

$$\mathbf{B} \;\mapsto\; \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} - \nabla \alpha) = \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times (\nabla \alpha) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \tag{41b}$$

O resultado acima é o que nós denominamos de *simetria*, isto é, uma transformação que mantém algum resultado inalterado. Nesse caso em particular, as transformações (40a) e (40b) são denominadas *transformações de calibre* e a invariância dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ é chamada de *simetria de calibre*. Por essa razão, os potenciais ϕ e $\mathbf{A}$ também são chamados de *campos de calibre*. Como as equações de Maxwell dependem somente dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, não é muito difícil concluir que esse conjunto de equações é invariante pelas transformações de calibre definidas acima. Nesse caso, dizemos que a eletrodinâmica de Maxwell é simétrica por transformações de calibre.

Como nós veremos mais adiante, o conceito de simetria de calibre possui implicações muito profundas. Inclusive, o chamado *princípio de calibre* aparece como um guia na construção de teorias que pretendem descrever as interações fundamentais da natureza. No entanto, por enquanto nós vamos nos restringir a uma aplicação mais prática das simetrias de calibre. Como nós veremos abaixo, se nós escolhermos uma transformação de calibre de forma conveniente, nós podemos realizar simplificações consideráveis na equações que descrevem a dinâmica dos campos de calibre. Com efeito, como as equações (39a) e (39b) são invariantes por transformações de calibre, nós podemos igualmente escrevê-las em termos dos potenciais ϕ e $\mathbf{A}$ ou dos "campos transformados" ϕ' e $\mathbf{A}'$. Nesse último caso nós temos

$$\nabla^2\phi' + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}') = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{42a}$$

e

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}'}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A}' + \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t}\right) = \mu_0\mathbf{J}. \tag{42b}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t} &= \nabla\cdot\Big(\mathbf{A} - \nabla\alpha\Big) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi + \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)\\ &= \nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} - \nabla^2\alpha.\end{aligned} \tag{43}$$

Se nós escolhermos a função $\alpha(\mathbf{x},t)$ como sendo solução da seguinte equação de onda inomogênea

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} - \nabla^2\alpha = f(\mathbf{x},t), \tag{44}$$

onde $f(\mathbf{x},t)$ é uma função arbitrária. Nesse caso, podemos escrever a seguinte expressão

$$\nabla\cdot\mathbf{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t} = \nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + f(\mathbf{x},t). \tag{45}$$

Vamos escolher a função $f(\mathbf{x},t)$ como sendo dada por

$$f(\mathbf{x},t) = -\nabla\cdot\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{46}$$

Nesse caso, os campos "transformados" ϕ' e $\mathbf{A}'$ satisfazem a seguinte condição

$$\nabla\cdot\mathbf{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t} = 0. \tag{47}$$

De modo geral, a escolha de uma função $\alpha(\mathbf{x},t)$ é denominada de *fixação de calibre* e a condição que os potenciais devem respeitar é o que nós chamamos de *condição de calibre*. Em particular, a condição de calibre obtida acima é chamada de *calibre de Lorentz*. Uma consequência imediata dessa fixação de calibre é que as equações que descrevem a dinâmica dos campos ϕ' e $\mathbf{A}'$ podem ser escritas na forma de equações de onda inomogêneas, a saber

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi'}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\phi' = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{48a}$$

e

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}'}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A}' = \mu_0\mathbf{J}. \tag{48b}$$

É interessante notar que a condição de calibre de Lorentz ainda possui uma ambiguidade residual. De fato, se nós fizermos uma segunda transformação de calibre na forma

$$\phi'(\mathbf{x},t) \;\mapsto\; \phi''(\mathbf{x},t) = \phi'(\mathbf{x},t) + \frac{\partial\beta(\mathbf{x},t)}{\partial t}, \tag{49a}$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x},t) \;\mapsto\; \mathbf{A}''(\mathbf{x},t) = \mathbf{A}'(\mathbf{x},t) - \boldsymbol{\nabla}\beta(\mathbf{x},t), \tag{49b}$$

onde $\beta(\mathbf{x},t)$ é uma função harmônica, isto é

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\beta = 0, \tag{50}$$

podemos verificar que os novos campos “transformados” ϕ'' e $\mathbf{A}''$ também satisfaz a condição de calibre de Lorentz, isto é

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}'' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi''}{\partial t} = 0. \tag{51}$$

Uma consequência interessante dessa simetria residual aparece quando nós tomamos $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$. Nesse caso, nós podemos escolher a função $\beta(\mathbf{x},t)$ como sendo a solução da equação

$$\boldsymbol{\nabla}^2\beta + \frac{\partial\phi'}{\partial t} = 0, \tag{52}$$

de modo que a condição (50) nos permite anular o campo $\phi''(\mathbf{x},t)$ em todo espaço e para todo instante de tempo. Desse modo, a fixação de calibre se traduz nas seguinte condições sobre os potenciais

$$\phi''(\mathbf{x},t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}''(\mathbf{x},t) = 0. \tag{53}$$

As condições acima são conhecidas como *calibre de Coulomb* e serão bastante convenientes durante a análise dos modos de propagação.

D. Modos de propagação e interpretação de partículas:

Estudaremos agora a questão dos modos de propagação na eletrodinâmica de Maxwell e vamos buscar estabelecer uma interpretação que associe um campo a uma partícula. Em primeiro lugar, vamos reconsiderar as equações (39a) e (39b) na ausência de fontes ($\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$), isto é

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) = 0, \tag{54a}$$

e

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = 0. \tag{54b}$$

A fim de simplificar a nossa discussão, trabalharemos com a escolha de calibre de Coulomb, conforme introduzido anteriormente. Nesse caso, a dinâmica dos potenciais fica inteiramente descrita em termos da equação

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} = 0, \tag{55}$$

mais as condições calibre

$$\phi = 0 \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0. \tag{56}$$

Desse modo, a própria condição de calibre nos fornece uma solução para o campo ϕ e nós precisamos apenas trabalhar com a solução do potencial vetor $\mathbf{A}$. Como nós estamos interessados em estudar os modos de propagação, vamos considerar a seguinte solução de ondas planas

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_0\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}. \tag{57}$$

onde $\mathbf{A}_0$ denota um vetor constante que determina a direção de oscilação dos modos de propagação. Além disso, $\mathbf{k}$ representa o chamado vetor de onda e ω denota a frequência do modo de propagação. Substituindo a equação acima em (55) nós obtemos a seguinte relação de dispersão

$$\omega^2 - c^2\mathbf{k}^2 = 0. \tag{58}$$

Além disso, impondo a condição $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}$ sobre a solução de onda plana, nós obtemos seguinte relação de transversalidade

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_0 = 0. \tag{59}$$

Levando em conta que o vetor $\mathbf{k}$ especifica a direção de propagação da onda plana e o vetor $\mathbf{A}_0$ determina a sua direção de oscilação, a equação acima nos diz que a oscilação de uma onda plana, no calibre de Coulomb, ocorre no plano transverso à sua direção de propagação. Desse modo, não é muito difícil de concluir que todas a informação necessária sobre a propagação dos campos de calibre pode ser descritas em termos de dois vetores de polarização definidos no plano transverso ao vetor $\mathbf{k}$.

De posse dos resultados obtido acima, podemos escrever os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ da seguinte forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = i\omega\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \tag{60a}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = i(\mathbf{k}\times\mathbf{A}_0)\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}. \tag{60b}$$

Obviamente, para associar os resultados acima com grandezas fisicamente mensuráveis, nós precisamos tomar a parte real das expressões obtidas. Além disso, a partir dos resultados obtidos acima nós podemos verificar as seguintes propriedades

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0, \tag{61a}$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0. \tag{61b}$$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0, \tag{61c}$$

As equações acima nos permite concluir que os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ oscilam um plano transverso à direção de propagação e, além disso, esse dois campos oscilam em planos perpendiculares entre si.

Retornemos agora à relação de dispersão obtida anteriormente. De um ponto de vista da mecânica ondulatória essa é uma relação de dispersão bastante usual, pois a mesma relaciona de forma linear a frequência e o chamado vetor de onda de um dado modo de propagação. No entanto, nós pretendemos utilizá-la em favor de uma interpretação que associa uma partícula ao campo eletromagnético. Com efeito, vamos recordar as relações de *dualidade onda-partícula* estabelecidas, respectivamente, por Planck e de-Broglie nos primórdios da física quântica, a saber

$$E = \hbar\omega, \tag{62a}$$

e

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \tag{62b}$$

onde E e $\mathbf{p}$ representam, respectivamente, a energia e o *momentum* de uma partícula associada a uma onda plana de frequência ω e vetor de onda $\mathbf{k}$. Combinando as equações acima com a relação de dispersão (58), obtemos

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2. \tag{63}$$

Mas a equação acima corresponde exatamente à relação de Einstein para uma partícula de massa zero. Além disso, levando em conta que o campo eletromagnético se propaga em termos de dois graus de liberdade (dois vetores de polarização), nós podemos associá-lo a uma partícula com estados de *helicidade* ± 1. Embora a nossa análise tenha sido bastante heurística, o mesmo tipo de interpretação surge quando nós realizamos a quantização do campo eletromagnético. Nesse contexto, a partícula mencionada acima é chamada de *fóton* e possui o papel de *bóson* mediador da interação eletromagnética.

II. ELETRODINÂMICA DE PROCA:

Embora a ideia de que o fóton seja uma partícula de massa nula seja quase unanimidade dentre os físicos, não existe nenhuma evidência experimental que comprove essa ideia de forma definitiva [3]. Existem, contudo, diversos experimentos que estabelecem limites superiores para a massa dessa partícula. Atualmente, o limite mais restritivo para a massa do fóton é dado por [4]

$$m_\gamma \lesssim 1,78 \times 10^{-54}\,\text{kg}. \tag{64}$$

Como o resultado acima não garante que a massa do fóton deve ser zero, mas apenas menor do que um certo valor, nós podemos explorar novos domínios teóricos onde o fóton possui uma massa não-nula. Além disso, compreender a descrição de uma partícula massiva e associada a um campo vetorial é de fundamental importância para o entendimento das outras interações fundamentais da natureza.

A. Equações de movimento na eletrodinâmica de Proca:

Como nós vimos anteriormente, a eletrodinâmica de Maxwell acomoda muito bem a interpretação de que o campo eletromagnético está associado a uma partícula de massa zero. Portanto, se nós pretendemos descrever um fóton de massa não-nula, nós precisamos fazer algum tipo de modificação nas equações de Maxwell. Com efeito, esse objetivo pode ser atingido com a chamada eletrodinâmica de Proca. De forma direta, a eletrodinâmica de Proca preserva a ideia de que a interação entre partículas carregadas interagem entre si por intermédio dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ (via força de Lorenz). Por sua vez, esse campos continuam sendo escritos em termos de potenciais ϕ e $\mathbf{A}$, a saber

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{65a}$$

e

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}. \tag{65b}$$

As expressões acima garantem que as equações de movimento homogêneas, (2c) e (2b), permaneçam inalteradas, isto é, mesmo no contexto da eletrodinâmica de Proca os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ devem satisfazer às equações

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{66a}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{66b}$$

No entanto, as equações inomogêneas sofrem uma pequena alteração para acomodar um termos que, como nós veremos, pode ser associado com a massa do fóton. Nesse seguinte, vamos substituir (2a) e (2d) pelas seguintes equações

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} + \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2 \phi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{67a}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} + \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{67b}$$

onde m_γ é uma parâmetro com dimensão de massa e as constantes fundamentais c e $\hbar$ foram introduzidas por uma questão de dimensionalidade. Como nós podemos observar, é possível recuperar as equações usuais de Maxwell quando nós tomamos o limite $m_\gamma \to 0$.

Obviamente, todos os resultados obtidos a partir da eletrodinâmica de Maxwell, e encontrados em livros-texto usuais, podem ser rediscutidos no contexto da eletrodinâmica de Proca. A título de exemplo vamos considerar a equação para a eletrostática, a saber

$$-\boldsymbol{\nabla}^2 \phi + \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2 \phi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho. \tag{68}$$

A solução da equação acima para uma densidade de carga estática arbitrária é dada por

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3y \, G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}), \tag{69}$$

onde $G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ representa a função de Green do operador $-\boldsymbol{\nabla}^2 + \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2$. Com efeito, essa é uma função de Green bastante conhecida na literatura e pode ser escrita da seguinte forma

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \exp\left(-\frac{m_\gamma c}{\hbar} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|\right). \tag{70}$$

Como nós podemos observar, a modificação devido ao parâmetro de massa m_γ produz uma interação do tipo Yukawa.

B. Conservação da carga elétrica:

Um problema aparente da eletrodinâmica de Proca diz respeito a conservação da carga elétrica. De fato, como nós veremos abaixo, a equação de continuidade para a carga elétrica não surge uma consequência automática das equações de movimento, mas sim como o resultado da imposição de uma condição subsidiária sobre os potenciais ϕ e $\mathbf{A}$. Seguindo o mesmo procedimento realizado na eletrodinâmica de Maxwell, vamos tomar a derivada temporal da equação (67a) e a divergência da equação (67b), nesse caso, obtemos os seguintes resultados

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}) + \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{71a}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) + \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2 \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = \mu_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}). \tag{71b}$$

Combinando as duas equações acima e utilizando a identidade $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) = 0$, nós obtemos a seguinte equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2 \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right). \tag{72}$$

Ou seja, nós temos uma espécie de violação da equação de continuidade para a carga elétrica. No entanto, a conservação da carga elétrica é uma propriedade altamente desejável desde um ponto de vista físico e, portanto, a fim de compatibilizar essa lei de conservação com a eletrodinâmica de Proca, nós vamos supor que os impôr a seguinte condição subsidiária sobre os potenciais ϕ e $\mathbf{A}$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0. \tag{73}$$

Nesse caso, a equação de continuidade para a carga elétrica emerge como um subproduto da condição imposta acima.

Adicionalmente, é interessante observar que a condição subsidiária imposta acima possui a mesma forma da equação de fixação de calibre de Lorentz discutido anteriormente. No entanto, apesar da mesma equação matemática, nós não devemos confundir essa duas condições. A condição de calibre de Lorentz aparece como resultado de uma arbitrariedade que nós temos na eletrodinâmica de Maxwell. Já no caso da eletrodinâmica de Proca, como nós veremos logo abaixo, ocorre uma violação da simetria de calibre e, portanto, a condição subsidiária aparece como uma imposição necessária para a conservação da carga elétrica.

C. Quebra da invariância de calibre:

Embora os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sejam invariantes por simetria de calibre, conforme definida no contexto da eletrodinâmica de Maxwell, o mesmo não pode ser dito sobre as equações de movimento da eletrodinâmica de Proca. Com efeito, consideremos as equações (67a) e (67b) escritas em termos de campos "transformados", isto é

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}' + \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2 \phi' = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{74a}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}' + \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2 \mathbf{A}' = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t}, \tag{74b}$$

Aplicando a definição da transformação de calibre, podemos reescrever as equações acima da seguinte forma

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} + \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2 \left(\phi + \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{75a}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} + \left(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\right)^2 \left(\mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla}\alpha\right) = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{75b}$$

Observe que, para uma transformação de calibre arbitrária, as equações acima não recuperam a forma original das equações de Proca. Desse modo, nós podemos concluir que ocorre uma violação da simetria de calibre no contexto da eletrodinâmica de Proca.

Como nós veremos mais adiante, a simetria de calibre é uma propriedade bastante desejável para as teorias que almejam descrever as interações da natureza. De fato, o chamado *princípio de calibre* aparece como um elemento norteador na elaboração de teorias de campos. Portanto, uma lição bastante valiosa que nós podemos extrair da eletrodinâmica de Proca é que se nós quisermos lidar com partículas massivas descritas por campos de calibre (e nós temos queremos!), então nós precisamos encarar o problema da violação da simetria de calibre. Nesse sentido, por exemplo, aparece o famigerado mecanismo de Higgs como uma solução para o dilema apresentado acima.

D. Modos de propagação e o fóton massivo:

Até aqui nós introduzimos uma modificação nas equações de Maxwell com a justificativa de acomodar a interpretação de que o fóton pode ser uma partícula massiva. No entanto, embora o parâmetro m_γ tenha dimensão de massa, ainda não está muito claro o motivo pelo qual nós podemos interpretar esse parâmetro como sendo a massa de uma partícula. A fim de apresentar uma justificativa para essa questão, nós vamos estudar os modos de propagação da eletrodinâmica de Proca.

Nesse sentido, vamos reconsiderar as equações (67a) e (67b) mas agora escritas em termos dos potenciais ϕ e $\mathbf{A}$, a saber

$$-\boldsymbol{\nabla}^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) + \Big(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\Big)^2\phi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{76a}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} + \Big(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\Big)^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\Big(-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\Big). \tag{76b}$$

Utilizando a condição subsidiária imposta acima, podemos reescrever as equações acima da seguinte

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\phi + \Big(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\Big)^2\phi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{77a}$$

e

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} + \Big(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\Big)^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J}. \tag{77b}$$

Ou seja, a dinâmica dos potenciais ϕ e $\mathbf{A}$ pode ser descritas em termos de uma equação de onda inomogênea. A fim de estudar os modos de propagação, vamos considerar as equações acima na ausência de fontes externas, isto é

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\phi + \Big(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\Big)^2\phi = 0, \tag{78a}$$

e

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} + \Big(\frac{m_\gamma c}{\hbar}\Big)^2\mathbf{A} = 0. \tag{78b}$$

Novamente nós estamos interessados em soluções na forma ondas planas, assim, podemos escrever

$$\phi(\mathbf{x},t) = \phi_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \tag{79a}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}. \tag{79b}$$

Substituindo as expressões acima nas equações (78a) e (78b), nós obtemos a seguinte relação de dispersão associadas aos modos de propagação

$$\omega^2 = c^2\mathbf{k}^2 + \frac{m_\gamma^2 c^4}{\hbar^2}. \tag{80}$$

Novamente nós estamos interessados em estabelecer uma conexão entre o campo eletromagnético e uma partícula. Nesse sentido, utilizando as relações de Planck e de-Broglie junto com a relação de dispersão acima, obtemos

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_\gamma^2 c^4. \tag{81}$$

A equação obtida acima corresponde exatamente à relação de Einstein para uma partícula relativística de massa m_γ. Portanto, nós podemos associar o campo de Proca a uma partícula massiva, ou seja, um *fóton massivo.*

Além disso, combinando as soluções (79a) e (79b) com a condição subsidiária da eletrodinâmica de Proca, nós obtemos a seguintes expressão

$$\phi_0 = \frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0. \tag{82}$$

Essencialmente, a equação acima nos diz que o campos $\phi(\mathbf{x}, t)$ não corresponde a um grau de liberdade físico da teoria, pois o mesmo pode ser escrito em termos do campo $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$. Desse modo, nós podemos concluir que o campos de Proca possui três graus de liberdade, ou seja, a sua propagação depende de três vetores de polarização. Esses três graus de liberdade podem ser associados às três projeções de *spin* de uma partícula de *spin*-1. Portanto, nós podemos utilizar o campo de Proca para descrever uma partícula massiva e de *spin*-1.

III. INTRODUÇÃO ÀS TEORIAS DE CALIBRE:

Conforme mencionado anteriormente, o conceito de simetria de calibre pode ser utilizado como uma princípio norteador para a construção de teorias que descrevem interações fundamentais. Com efeito, o Modelo Padrão da física de partículas foi construído com base em simetrias por transformações de calibre [5, 6].

Nesta seção nós pretendemos introduzir de forma didática a ideia de se utilizar a simetria do calibre para descrever interações fundamentais. Nesse sentido, vamos começar a nossa investigação a partir da equação de Klein-Gordon, a saber

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0, \tag{83}$$

onde $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ representa uma função escalar complexa e m denota um parâmetro com dimensão de massa. Originalmente, a equação acima foi proposta como a primeira tentativa de compatibilização da mecânica quântica com a teoria da relatividade restrita. Nesse contexto, o campo $\psi(\mathbf{x}, t)$

faz o papel da função de onda da mecânica quântica. No entanto, essa maneira de enxergar a equação de Klein-Gordon possui sérios problemas de interpretação e foi prontamente abandonada.

Já no contexto da teoria quântica de campos, campo de Klein-Gordon pode ser associado com uma partícula massiva e de *spin*-0. Uma forma bastante prática de se compreender essa afirmação se dá em termos da análise dos modos de propagação associados com a equação acima. De fato, considerando uma solução de onda plana

$$\psi(\mathbf{x},t) = \psi_0\, e^{i(\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}-\omega t)}, \tag{84}$$

a equação de Klein-Gordon nos fornece a seguinte relação de dispersão

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 c^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2}. \tag{85}$$

Utilizando as relações de Planck e de-Broglie, obtemos o seguinte resultado

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \tag{86}$$

Novamente nós nos deparamos com a relação de Einstein para uma partícula massiva relativística, o que nos fornece uma suporte para a interpretação mencionada acima. Com relação ao fato de nós associarmos o campos de Klein-Gordon a uma partícula de *spin*-0, heuristicamente nós podemos encarar isso como uma consequência do campos escalar não possuir nenhuma grau de liberdade *interno*, assim como nós esperamos de uma partícula de *spin*-0. Além disso, como nós estamos considerando que ψ é um campo complexo, nós podemos associá-lo ao mesmo tempo a descrição de uma partícula e de uma anti-partícula. Fisicamente, um campo com essas características pode ser utilizado na descrição dos mésons π^+ e π^-, por exemplo.

A. Conservação de carga:

Vejamos agora como nós podemos extrair uma lei de conservação a partir da equação de Klein-Gordon. Em primeiro lugar, observe que nós podemos tomar o complexo conjugado da equação de Klein-Gordon, de modo que nós ficamos com o seguinte par de equações

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0, \tag{87a}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\psi^* + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi^* = 0. \tag{87b}$$

Multiplicando a equação (87a) por ψ^* e (87b) por ψ e, em seguida, subtraindo a primeira da segunda, obtemos o seguinte resultado

$$\frac{1}{c^2}\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\right) - \left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}^2\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}^2\psi^*\right) = 0. \tag{88}$$

Observando que

$$\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right), \tag{89a}$$

e

$$\psi^*\boldsymbol{\nabla}^2\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}^2\psi^* = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right) \tag{89b}$$

Portanto, podemos reescrever a equação (88) da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[c^2\left(\psi\boldsymbol{\nabla}\psi^* - \psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi\right)\right] = 0. \tag{90}$$

Relação acima possui a forma de uma equação de continuidade, com densidades de carga e corrente identificadas como sendo os termos entre parêntesis. No entanto, qual é a interpretação desses objetos que estão sendo conservados? Uma possibilidade interessante consiste na associação desse objetos com as densidades de carga e corrente eletromagnética, contudo, para isso nós precisamos garantir que os tempos que aparecem na equação acima tenham dimensões compatíveis com essas grandezas físicas. Nesse sentido, assumindo que o campos de Klein-Gordon seja uma quantidade adimensional, nós vamos multiplicar a equação acima pelo seguinte fator

$$-\frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2, \tag{91}$$

onde e denota a constante de carga elétrica fundamental. Observe que nós estamos multiplicando por uma grandeza *imaginária* a fim de garantir que as quantidades conservadas obtidas sejam grandezas *reais*. Além disso, o sinal negativo está sendo utilizado como uma mera convenção e não possui nenhum significado físico. Realizando a operação indicada acima, nós obtemos o seguinte resultado

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right] + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\frac{ie}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right)\right] = 0. \tag{92}$$

Comparando essa última relação com a equação de continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0, \tag{93}$$

nós obtemos as respectivas expressões para as densidades de carga e corrente

$$\rho = \frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right), \tag{94}$$

e

$$\mathbf{J} = \frac{ie}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right). \tag{95}$$

B. Simetria por transformação de fase global:

Desde de a formulação do chamado *teorema de Noether*, nós sabemos que existe uma relação profunda entre a existência de quantidades conservadas e as simetrias de um dado sistema. De fato, o teorema de Noether nos garante que a cada *simetria contínua* de um dado sistema, nós devemos tem uma corrente e uma carga conservada. Embora o teorema não seja necessariamente válido no sentido oposto, nós podemos suspeitar que a lei de conservação obtida acima esteja associada com alguma simetria do sistema, e de fato, como nós veremos abaixo, esse é o caso.

Consideremos então uma *transformação de fase global* sobre o campo de Klein-Gordon, isto é

$$\psi(\mathbf{x},t) \;\mapsto\; \psi'(\mathbf{x},t) = e^{i\alpha}\psi(\mathbf{x},t), \tag{96a}$$

e

$$\psi^*(\mathbf{x},t) \;\mapsto\; \psi^{*\prime}(\mathbf{x},t) = e^{-i\alpha}\psi^*(\mathbf{x},t), \tag{96b}$$

onde α denota uma parâmetro de *transformação global*, ou seja, independente dos pontos do espaço e do tempo. Como nós podemos verificar, a transformação definida acima mantém as densidades de carga e correntes invariantes, a saber

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x},t) \;\mapsto\; \rho'(\mathbf{x},t) &= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left(\psi'\frac{\partial\psi^{*\prime}}{\partial t} - \psi^{*\prime}\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right)\\ &= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left((e^{i\alpha}\psi)\frac{\partial}{\partial t}(e^{-i\alpha}\psi^*) - e^{-i\alpha}\psi^*\frac{\partial}{\partial t}(e^{i\alpha}\psi)\right)\\ &= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \rho(\mathbf{x},t),\end{aligned} \tag{97a}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{x},t) \;\mapsto\; \mathbf{J}'(\mathbf{x},t) &= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\left(\psi^{*\prime}\boldsymbol{\nabla}\psi' - \psi'\boldsymbol{\nabla}\psi^{*\prime}\right)\\ &= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\left((e^{-i\alpha}\psi^*)\boldsymbol{\nabla}(e^{i\alpha}\psi) - (e^{i\alpha}\psi)\boldsymbol{\nabla}(e^{-i\alpha}\psi^*)\right)\\ &= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right) = \mathbf{J}(\mathbf{x},t).\end{aligned} \tag{97b}$$

Além de ser uma simetria das quantidades conservadas, a transformação global de fase definida também é uma simetria da própria equação de Klein-Gordon, isto é, se $\psi(\mathbf{x}.t)$ for uma solução da equação de Klein-Gordon, o campo transformado $\psi(\mathbf{x}, t)$ também será uma solução da mesma equação de movimento. A verificação dessa afirmação é bastante simples. De fato, vamos reescrever a equação de Klein-Gordon da seguinte forma

$$\Delta\psi = 0, \tag{98}$$

onde nós definimos o operador de Klein-Gordon como sendo dado por

$$\Delta = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2. \tag{99}$$

Atuando com o operador de Klein-Gordon no campo transformado nós obtemos o seguinte resultado

$$\Delta\psi' = \Delta(e^{i\alpha}\psi) = e^{i\alpha}\Delta\psi. \tag{100}$$

Mas, como ψ é uma solução da equação de Klein-Gordon, nós obtemos

$$\Delta\psi' = 0, \tag{101}$$

e, portanto, ψ' também é uma solução. Desse modo, nós dizemos que a transformação de fase global definida acima é uma simetria da própria equação de Klein-Gordon.

C. Transformação de fase local e os campos de calibre:

Na seção anterior nós verificamos que teoria de Klein-Gordon possui uma simetria por transformação de fase global. Indo ainda mais além, nós podemos tentar estender essa simetria para uma transformação local definida por

$$\psi(\mathbf{x}, t) \;\mapsto\; \psi'(\mathbf{x}, t) = e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi(\mathbf{x}, t), \tag{102a}$$

e

$$\psi^*(\mathbf{x}, t) \;\mapsto\; \psi^{*\prime}(\mathbf{x}, t) = e^{-i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi^*(\mathbf{x}, t), \tag{102b}$$

onde $\alpha = \alpha(\mathbf{x}, t)$ é uma função dos pontos do espaço e do tempo. Esse tipo de transformação, onde o parâmetro de transformação é uma função dos pontos do espaço e do tempo, se enquadrada nas chamadas de *transformações de calibre* e as teorias que são invariantes por essas transformações são chamadas de *teorias de calibre*. Em particular, a transformação definida acima pertence a uma estrutura matemática denominada *grupo lie* $U(1)$.

No entanto, não é muito difícil verificar que a transformação definida acima não é uma simetria das densidades de carga e corrente definidas anteriormente. De fato, aplicando a transformação acima para essas quantidades nós obtemos o seguinte resultado

$$
\begin{aligned}
\rho(\mathbf{x},t) \;\mapsto\; \rho'(\mathbf{x},t) &= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left(\psi'\frac{\partial\psi^{*\prime}}{\partial t} - \psi^{*\prime}\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right)\\
&= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left((e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi)\frac{\partial}{\partial t}(e^{-i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi^*) - e^{-i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi^*\frac{\partial}{\partial t}(e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi)\right)\\
&= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - 2i\,\psi^*\psi\,\frac{\partial\alpha(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right) \neq \rho(\mathbf{x},t),
\end{aligned}
\tag{103a}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{x},t) \;\mapsto\; \mathbf{J}'(\mathbf{x},t) &= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\left(\psi^{*\prime}\boldsymbol{\nabla}\psi' - \psi'\boldsymbol{\nabla}\psi^{*\prime}\right)\\
&= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\left((e^{-i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi^*)\boldsymbol{\nabla}(e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi) - (e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi)\boldsymbol{\nabla}(e^{-i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi^*)\right)\\
&= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^* + 2i\psi^*\psi\,\boldsymbol{\nabla}\alpha(\mathbf{x},t)\right) \neq \mathbf{J}(\mathbf{x},t).
\end{aligned}
\tag{103b}
$$

Como nós podemos observar, a violação da simetria local ocorre devido a atuação das derivadas $\partial/\partial t$ e $\boldsymbol{\nabla}$ sobre os campos transformados. Uma forma de remediar o problema encontrado acima consiste na definição de novos operadores diferenciais D_t e $\mathbf{D}$, respectivamente denominados derivada covariante temporal e gradiente covariante, sujeitos às seguintes propriedades

$$D_t\psi' = e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}D_t\psi, \tag{104a}$$

e

$$\mathbf{D}\psi' = e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\mathbf{D}\psi. \tag{104b}$$

De posse desse objetos nós podemos definir uma *densidade de carga local* e uma *densidade de corrente local*, a saber

$$\rho_l(\mathbf{x},t) = \frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left(\psi(D_t\psi)^* - \psi^*(D_t\psi)\right), \tag{105a}$$

e

$$\mathbf{J}_l(\mathbf{x},t) = \frac{ie}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\left(\psi^*(\mathbf{D}\psi) - \psi(\mathbf{D}\psi)^*\right). \tag{105b}$$

Conforme nós podemos verificar, os objetos definidos acima são invariantes pela transformação de calibre definida acima. Com efeito, realizando uma transformação de calibre definida acima nós obtemos

$$
\begin{aligned}
\rho_l(\mathbf{x},t) \;\mapsto\; \rho_l'(\mathbf{x},t) &= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \Big(\psi'(D_t\psi')^* - \psi^{*\prime}(D_t\psi')\Big) \\
&= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \Big(e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}e^{-i\alpha(\mathbf{x},t)}\,\psi(D_t\psi)^* - e^{-i\alpha(\mathbf{x},t)}e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\,\psi^*(D_t\psi)\Big) \\
&= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \Big(\psi(D_t\psi)^* - \psi^*(D_t\psi)\Big) = \rho_l(\mathbf{x},t),
\end{aligned}
\tag{106a}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}_l(\mathbf{x},t) \;\mapsto\; \mathbf{J}_l'(\mathbf{x},t) &= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \Big(\psi^{*\prime}(\mathbf{D}\psi)' - \psi'(\mathbf{D}\psi')^*\Big) \\
&= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \Big(e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}e^{-i\alpha(\mathbf{x},t)}\,\psi^*(\mathbf{D}\psi) - e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}e^{-i\alpha(\mathbf{x},t)}\,\psi(\mathbf{D}\psi)^*\Big) \\
&= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \Big(\psi^*(\mathbf{D}\psi) - \psi(\mathbf{D}\psi)^*\Big) = \mathbf{J}_l(\mathbf{x},t).
\end{aligned}
\tag{106b}
$$

Nos resta ainda construir operadores diferenciais D_t e $\mathbf{D}$ que satisfaçam as propriedades definidas acima. Vamos partir da seguinte proposta de atuação desses operadores

$$D_t\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} - i\phi\psi, \tag{107a}$$

$$\mathbf{D}\psi = \boldsymbol{\nabla}\psi + i\mathbf{A}\psi, \tag{107b}$$

onde $\phi(\mathbf{x},t)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ são denominados campos de calibre. A atuação sobre um campo transformado será definida por

$$D_t\psi' = \frac{\partial\psi'}{\partial t} - i\phi'\psi', \tag{108a}$$

e

$$\mathbf{D}\psi' = \boldsymbol{\nabla}\psi' + i\mathbf{A}'\psi'. \tag{108b}$$

Observe que nós estamos assumindo que os campos de calibre também devem sofrer algum tipo de transformação. Agora, o nosso trabalho consiste em escolher alguma regra de transformação para os campos de calibre de forma a compensar o problema que nós temos com a atuação de derivadas usuais sobre os campos transformados. Para tanto, consideremos os seguintes passos

$$D_t\psi' = e^{i\alpha}D_t\psi, \tag{109a}$$

$$\frac{\partial\psi'}{\partial t} - i\phi'\psi' = e^{i\alpha}\bigg(\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\phi\psi\bigg), \tag{109b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{i\alpha}\psi) - i\phi'(e^{i\alpha}\psi) = e^{i\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\phi\psi\right), \tag{109c}$$

$$e^{i\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\frac{\partial\alpha}{\partial t}\psi - i\phi'\psi\right) = e^{i\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\phi\psi\right). \tag{109d}$$

Como nós podemos observar, para que a equação acima seja válida para qualquer função $\alpha(\mathbf{x}, t)$ nós devemos ter a seguinte regra de transformação de calibre para o campos $\phi(\mathbf{x}, t)$

$$\phi(\mathbf{x}, t) \ \mapsto \ \phi'(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial\alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \tag{110}$$

De forma análoga, temos

$$\mathbf{D}\psi' = e^{i\alpha}\mathbf{D}\psi, \tag{111a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\psi' + i\mathbf{A}'\psi' = e^{i\alpha}\Big(\boldsymbol{\nabla}\psi + i\mathbf{A}\psi\Big), \tag{111b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(e^{i\alpha}\psi) + i\mathbf{A}'(e^{i\alpha}\psi) = e^{i\alpha}\Big(\boldsymbol{\nabla}\psi + i\mathbf{A}\psi\Big), \tag{111c}$$

$$e^{i\alpha}\Big(\boldsymbol{\nabla}\psi + i\boldsymbol{\nabla}\alpha\,\psi + i\mathbf{A}'\psi\Big) = e^{i\alpha}\Big(\boldsymbol{\nabla}\psi + i\mathbf{A}\psi\Big). \tag{111d}$$

Portanto, a regra de transformação para o campos vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ deve ser dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \ \mapsto \ \mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\nabla}\alpha(\mathbf{x}, t). \tag{112}$$

Como nós podemos observar, a transformação de calibre dos campos ϕ e $\mathbf{A}$ compensa o problema que aparece com a atuação das derivadas usuais sobre os campos transformados.

No entanto, nós ainda temos um problema para garantir que a transformação definida acima seja uma simetria da equação de Klein-Gordon. De fato, atuando com o operador de Klein-Gordon no campo transformado, nós obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
\Delta\psi' &= \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\psi' \\
&= \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)(e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi) \\
&= e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\Delta\psi + 2i\, e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\alpha\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi\right) + \\
&- e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2\alpha\right)\psi \neq 0.
\end{aligned} \tag{113}$$

Ou seja, para uma transformação de calibre arbitrária, o campo transformado não satisfaz a equação de Klein-Gordon.

Para remediar o problema encontrado acima basta substituir as derivadas usuais que aparecem na equação de Klein-Gordon pelos operadores D_t e $\mathbf{D}$ definidos anteriormente. Nesse caso, vamos reescrever a equação de Klein-Gordon da seguinte forma

$$\frac{1}{c^2}D_t^2\psi - \mathbf{D}^2\psi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi = 0. \tag{114}$$

Com efeito, não é difícil verificar que, se o campos ψ for uma solução da equação acima, o campos transformada também será, a saber

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}D_t^2\psi' - \mathbf{D}^2\psi' + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi' &= \frac{1}{c^2}D_t^2(e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi) - \mathbf{D}^2(e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2(e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\psi)\\ &= e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}\left(\frac{1}{c^2}D_t^2\psi - \mathbf{D}^2\psi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi\right) = 0.\end{aligned} \tag{115}$$

D. Interação do campo de Klein-Gordon com o campo Eletromagnético:

Na seção anterior nós vimos que a imposição de que a transformação de calibre definida acima seja uma simetria da teoria de Klein-Gordon nos conduz aos chamados campos de calibre. Como nós podemos observar, a transformação de calibre desses campos coincide exatamente com a transformação de simetria que nós identificamos para os potenciais ϕ e $\mathbf{A}$ no contexto da eletrodinâmica de Maxwell. Dada a semelhança entre esses objetos, vamos identificar os campos de calibre definidos acima com os campos potenciais da eletrodinâmica de Maxwell. Essa identificação nos fornece uma forma de gerar *interação* entre os campos de calibre e o campo de Klein-Gordon.

De fato, vamos reconsiderar as equações de Maxwell inomogêneas, mas colocando as densidades de carga e corrente como sendo, respectivamente, $\rho_l(\mathbf{x},t)$ e $\mathbf{J}_l(\mathbf{x},t)$. Nesse caso, podemos escrever as equações de Maxwell inomogêneas como sendo dadas por

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_l, \tag{116a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}_l + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{116b}$$

Observe que nós podemos escrever as densidades de carga e corrente, respectivamente, como sendo dadas pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned}\rho_l(\mathbf{x},t) &= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Big(\psi(D_t\psi)^* - \psi^*(D_t\psi)\Big)\\ &= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \frac{2e}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi^*\psi\,\frac{\partial\phi}{\partial t}\\ &= \rho(\mathbf{x},t) - \frac{2e}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi^*\psi\,\phi,\end{aligned} \tag{117a}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_l(\mathbf{x},t) &= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \Big(\psi^*(\mathbf{D}\psi) - \psi(\mathbf{D}\psi)^*\Big) \\
&= \frac{ie}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \Big(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\Big) - \frac{2e}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \psi^*\psi\,\mathbf{A} \\
&= \mathbf{J} - \frac{2e}{c}\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \psi^*\psi\,\mathbf{A}. \qquad (117b)
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima em (116a) e (116b), nós obtemos os seguintes resultados

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} + \frac{2e\mu_0}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \psi^*\psi\,\phi = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \qquad (118a)$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} + \frac{2e\mu_0}{c}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \psi^*\psi\,\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \qquad (118b)$$

Como nós podemos observar, a imposição de uma simetria de calibre na teoria de Klein-Gordon nos conduziu ao acoplamento do campo ψ com o campo eletromagnético.

Desse modo, nós podemos compreender que o chamado *princípio de calibre*, que consiste na promoção de uma simetria global a uma simetria local, nos conduz a um procedimento sistemático que nos permite gerar interação entre campos. Como esses campos estão associados com partículas, nós podemos concluir que o a simetria de calibre pode ser utilizada para descrever a interação entre partículas.

---

[1] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons (1998).

[2] D.J. Griffths, *Eletrodinâmica*, Pearson (2011).

[3] E.S. Gonçales, *A massa do fóton e a eletrodinâmica de Proca*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física Teórica-Unesp (2008).

[4] K.A. Olive *et.al.* (Particle Data Group), *Chin. Phys. C* **38**, 090001 (2014).

[5] M. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press (2014).

[6] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*, Oxford University Press (2005).