

CBPF – MINICURSO 2016-1

INTRODUÇÃO ÀS COLISÕES ULTRARRELATIVÍSTICAS ENTRE ÍONS PESADOS

Plasma de Quarks e Glúons (QGP) – Condensado de Vidro de Cor (CGC) - Hidrodinâmica Relativística Especial (RHD) – Modelos e Resultados Experimentais

2016

<http://armando-flavio.wikidot.com/cbpf-minicurso-2016-1>

Prof. Armando Flavio Rodrigues

UFF – INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICE_x

CAMPUS DE VOLTA REDONDA

armflavio@if.uff.br

SUPERLÍQUIDO DE PÁRTONS OU O PLASMA DE QUARKS E GLÚONS

NA DINÂMICA DO CONE DE LUZ

Conteúdo

1. UMA INTRODUÇÃO À TQC NA FRENTE DE ONDA DE LUZ (LFQFT)	8
Alguns resultados surpreendentes em LFQFT:	11
1.1. CINEMÁTICA RELATIVÍSTICA E AS VARIÁVEIS DE MANDELSTAM	12
1.1.1. GEOMETRIA DO ESPAÇO DE MINKOWSKI	12
1.1.2. ÁLGEBRA DO ESPAÇO DE MINKOWSKI	13
1.1.3. REFERENCIAIS DO LABORATÓRIO E DO CENTRO DE MOMENTUM	17
1.1.4. RAPIDEZ E PSEUDORRAPIDEZ	20
1.1.5. CINEMÁTICA E DINÂMICA NO CONE DE LUZ	23
2. QGP: UMA INTRODUÇÃO FENOMENOLÓGICA	25
2.1. LIBERDADE ASSINTÓTICA E CONFINAMENTO EM QCD	26
2.2. QUEBRA DE SIMETRIA QUIRAL EM QCD	30

2.3.	COMO SE FORMA O QGP	30
2.4.	ONDE ENCONTRAR O QGP.....	32
2.5.	EVIDÊNCIAS DO QGP EM COLISÕES RELATIVÍSTICAS DE ÍONS PESADOS.....	34
3.	A TRANSIÇÃO DE FASE QUARK-HÁDRON EM ALTAS TEMPERATURAS.....	35
3.1.	A TERMODINÂMICA BÁSICA DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS QUÂNTICAS	35
3.2.	SISTEMA DE PARTÍCULAS NÃO INTERAGENTES	39
3.3.	CORDA HADRÔNICA E DESCONFINAMENTO	42
3.4.	A ESTRUTURA DO VÁCUO DA QCD.....	44
3.5.	ALGUMAS ABORDAGENS DA QCD NÃO PERTURBATIVA.....	48
	O MODELO DE SACOLA (EM INGLÊS, <i>M.I.T. BAG MODEL</i>)	48
	O MODELO DE POTENCIAL	51
	O MODELO NJL.....	52
3.6.	A TEORIA QUIRAL PERTURBATIVA	53
	TEOREMA DE GOLDSTONE	55
	A QUEBRA DA SIMETRIA QUIRAL EM QCD	56
4.	A TRANSIÇÃO DE FASE QUARK-HÁDRON	58
4.1.	EQUAÇÃO DE ESTADO DO <i>BAG MODEL</i> DO M.I.T.	58
4.3.	TEMPERATURA DE HAGEDORN: LIMITE TEÓRICO	62
4.4.	EQUAÇÃO DE ESTADO PARAMETRIZADA	64
5.	TRANSIÇÃO DE FASE QUIRAL.....	66

5.1.	O CONDENSADO QUIRAL $\langle \bar{q}q \rangle$	68
5.1.1.	A EXPANSÃO EM ALTAS TEMPERATURAS	69
5.1.2.	A EXPANSÃO EM BAIXAS TEMPERATURAS	71
5.2.	O MODELO NJL EM DETALHE	72
5.2.1.	QUEBRA DINÂMICA DE SIMETRIA EM $T = 0$	74
5.2.2.	RESTAURAÇÃO DA SIMETRIA EM $T \neq 0$	76
6.	COLISÕES RELATIVÍSTICAS ENTRE ÍONS PESADOS	79
6.1.	REPRESENTAÇÃO DAS COLISÕES NO ESPAÇO-TEMPO	81
6.2.	PLATÔ CENTRAL E REGIÃO DE FRAGMENTAÇÃO	85
6.3.	HISTÓRIA SEQUENCIAL DAS COLISÕES ULTRARRELATIVÍSTICAS AA CENTRAIS	87
	Estágio de pré-equilíbrio e termalização: $0 < \tau < \tau_0$	88
	Evolução hidrodinâmica e congelamento (<i>freeze-out</i>): $\tau_0 < \tau < \tau_f$	89
	Congelamento e o pós-equilíbrio: $\tau_f < \tau$	89
6.4.	GEOMETRIA DAS COLISÕES DE ÍONS PESADOS	90
7.	HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA DAS COLISÕES DE ÍONS PESADOS	97
7.1.	PRODUÇÃO MÚLTIPLA DE PARTÍCULAS: AS REPRESENTAÇÕES DE ENRICO FERMI E LEV LANDAU	97
7.2.	A ESCALA E O FLUXO DE BJORKEN	99
7.2.1.	FLUIDO PERFEITO	100
8.	FORMAÇÃO E EVOLUÇÃO DO QGP	104

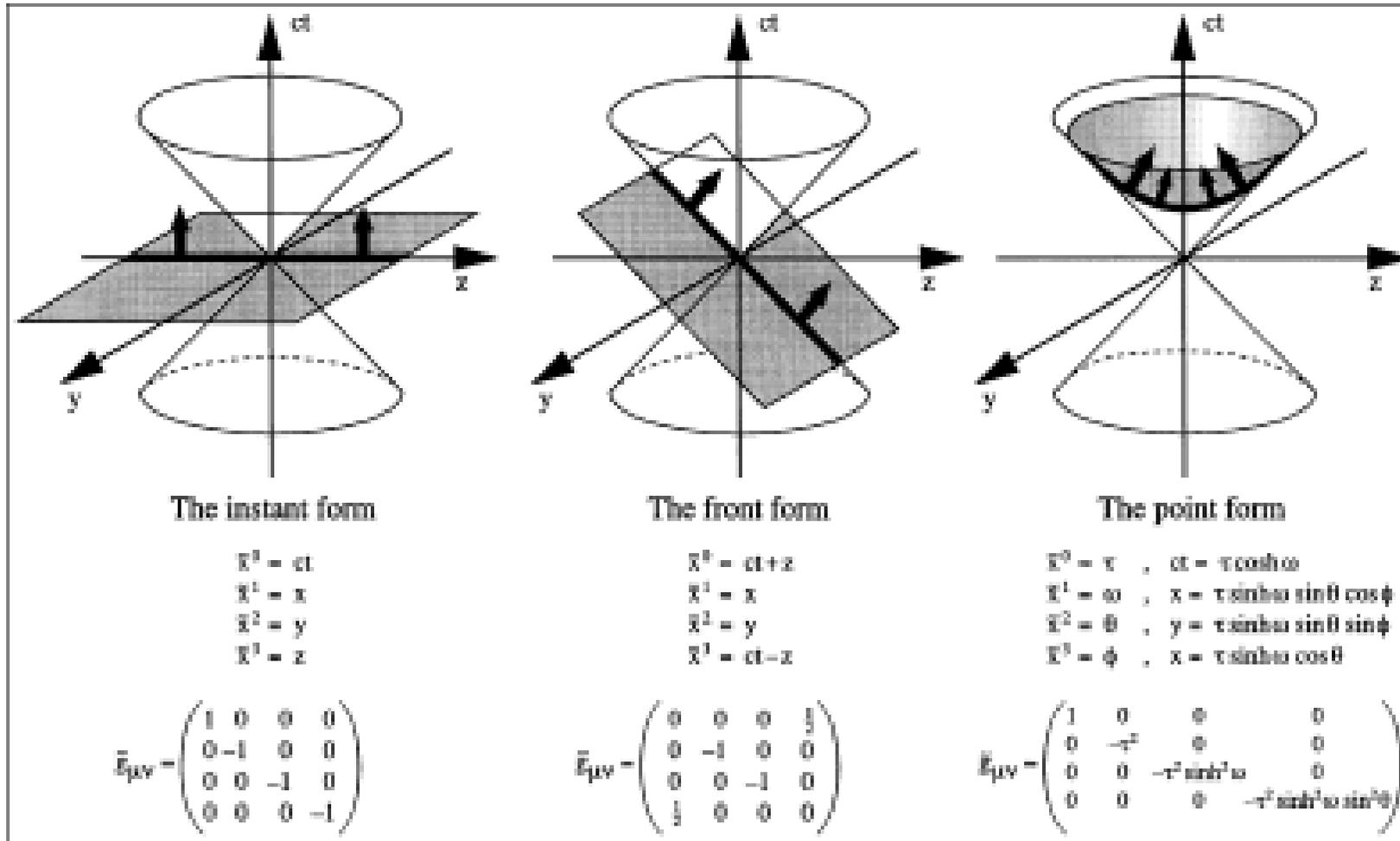
8.1.	A CONDIÇÃO INICIAL	105
8.1.1	MODELO DE QUEBRA DA CORDA COLORIDA.....	105
8.1.2	O CONDENSADO DE VIDRO COLORIDO (CGC).....	107
8.1.3	MODELOS EM pQCD	109
8.2.	O FLUXO ELÍPTICO: DEFINIÇÃO E ALGUNS RESULTADOS RECENTES.....	111
8.2.1.	O LÍQUIDO PERFEITO.....	115
	INTRODUÇÃO À HIDRODINÂMICA ULTRARRELATIVÍSTICA DAS COLISÕES ENTRE ÍONS PESADOS	117
	HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA ESPECIAL	117
1.	INTRODUÇÃO	117
2.	TERMODINÂMICA	120
2.1.	IDENTIDADES GENÉRICAS.....	120
2.2.	FLUIDO BARIÔNICO	121
2.3.	PROCESSO ISENTRÓPICO.....	122
2.4.	GÁS IDEAL CLÁSSICO.....	122
3.	AS EQUAÇÕES DE HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA	125
3.1.	REFERENCIAL DE REPOUSO EM UM FLUIDO.....	125
3.2.	VELOCIDADE DO FLUIDO.....	126
3.3.	CONSERVAÇÃO DO NÚMERO BARIÔNICO	126
3.4.	CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E MOMENTUM	127
3.5.	ONDAS SONORAS.....	130

3.6.	GÁS IDEAL BARIÔNICO	133
4.	EXPANSÃO HIDRODINÂMICA	135
4.1.	CONDIÇÕES INICIAIS	137
4.2.	EXPANSÃO LONGITUDINAL (PRESCRIÇÃO DE BJORKEN)	140
4.3.	ORDENS DE GRANDEZA	145
4.4.	ORIGENS DA EXPANSÃO TRANSVERSAL	148
4.5.	ESCALA TEMPORAL DA EXPANSÃO TRANSVERSAL	151
5.	ESPECTROS DE PARTÍCULAS E ANISOTROPIAS	153
5.1.	MOVIMENTO COLETIVO E PARTÍCULAS RÁPIDAS	153
5.2.	FLUXO RADIAL	155
5.3.	FLUXO ELÍPTICO	158
6.	VISCOSIDADE E TERMALIZAÇÃO	161
6.1.	TIPOS DE FLUXOS	161
6.2.	CORREÇÕES DA VISCOSIDADE	161
7.	O EXPERIMENTO ALICE	162
	CONDENSADO DE VIDRO DE COR (CGC) E ESPALHAMENTO EM ALTAS ENERGIAS NA QCD	164
1.	INTRODUÇÃO	164
2.	QUESTÕES FENOMENOLÓGICAS NA QCD DE ALTAS ENERGIAS	166
2.1.	COMPORTAMENTO EM ALTAS ENERGIAS DE SEÇÕES DE CHOQUE TOTAIS	166
2.2.	PRODUÇÃO MÚLTIPLA DE PARTÍCULAS NA QCD	167

2.3.	DIS – ESPALHAMENTO INELÁSTICO PROFUNDO	171
2.4.	COLISÕES NÚCLEO-NÚCLEO (N + N) E PRÓTON-NÚCLEO (P + N)	177
2.5.	UNIVERSALIDADE DO ESPALHAMENTO EM ALTAS ENERGIAS	181
3.	A TEORIA EFETIVA DO CGC	182
3.1.	A FUNÇÃO DE ONDA HADRÔNICA PARA x PEQUENO	185
3.2.	MODELO McLERRAN-VENUGOPALAN (MV) DE UM NÚCLEO PESADO	186
3.3.	O VIDRO DE COR	191
3.4.	O CAMPO CLÁSSICO DE COR	196
3.5.	A DISTRIBUIÇÃO GLUÔNICA	201
3.6.	SATURAÇÃO DE GLÚONS EM UM NÚCLEO PESADO	204

1. UMA INTRODUÇÃO À TQC NA FRENTE DE ONDA DE LUZ (LFQFT)

P. A. M. Dirac introduziu três possíveis dinâmicas relativísticas, no formalismo hamiltoniano, em 1949 :



Uma delas, a *light-front dynamics*, também chamada de *light-cone theory* e *infinite momentum frame field theory*, voltou a ser usada nos anos 60 e 70 no limite de altas energias ($q_0 \rightarrow i\infty$) e momentum infinito ($P \rightarrow \infty$), no contexto da *current algebra*, por Fubini, Adler, Gell-Mann, Weinberg, e outros. Usando esses limites, Bjorken predisse em 1969 [2] o hoje famoso escalonamento (Bjorken scaling) de funções de estrutura no espalhamento inelástico profundo (*deep inelastic scattering* - DIS), para pequeno $x \sim Q^2/s$ (definiremos essa variável mais à frente). O modelo dos pártons de Feynman foi formulado no referencial de momentum infinito, que usaremos aqui no contexto da *Light-Front Dynamics*, ou LFD. Mais tarde (1974), 't Hooft usou as variáveis e o calibre de frente de onda de luz $A^+ = A^0 + A^3 = 0$ para estudar o confinamento na QCD. A partir dos anos 80, Brodsky, Lepage et al. iniciaram o estudo da teoria perturbativa na frente de onda de luz (para um histórico resumido, ver [4]). A frente de onda de luz é, para Dirac, em suas próprias palavras, “... *the three-dimensional surface in space-time formed by a plane wave front advancing with the velocity of light*” [1].

A equação $x^+ = x^0 + x^3 = 0$ define o plano dessa frente de onda, e a métrica no **light-cone frame** não é diagonal como a métrica de Minkowski, como já visto acima, e pode ser dada, por exemplo, em uma das escolhas possíveis, como:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Em relação à métrica de Minkowski com base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, os vetores de base do referencial de cone de luz, nessa particular notação, serão $\{e_+, e_-, e_2, e_3\}$, onde $e_{\pm} \equiv (e_0 \pm e_1)/\sqrt{2}$.

Ao longo do desenvolvimento da teoria foram empregadas métricas equivalentes, como:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (Kogut-Soper); } g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (Lepage-Brodsky)}$$

Cabe observar que a expressão *inifinite momentum frame*, usada inicialmente por Bjorken e Feynman, deve ser interpretada como os limites já citados para os cálculos da época, e não reflete as características da LFD, uma vez que o momentum total é finito, e a dinâmica descrita é covariante e independe do referencial.

A formulação “space-like” (SL) usual da TQC, oriunda do sucesso do tratamento da QED no formalismo lagrangiano por Feynman, Schwinger e Tomonaga, e a formulação “light-front” (LF) de operadores no plano da frente de onda de luz, no formalismo hamiltoniano de Dirac, são duas representações independentes da mesma realidade física. Em virtude dessa independência, existem diferenças marcantes entre ambos os esquemas, mesmo no nível das propriedades básicas, não só em termos das respectivas estruturas matemáticas, mas também em aspectos físicos, como a natureza das variáveis de campo, a divisão dos geradores do grupo de Poincaré em dois setores cinemático e dinâmico disjuntos que ocorre na LFD, e a natureza do estado de vácuo, que na LFD é frequentemente identificado com o vácuo de Fock, após a diagonalização do operador hamiltoniano total.

Alguns resultados surpreendentes em LFQFT:

Os propagadores de campos, calculados no formalismo da LFQFT, são os seguintes:

- Campo escalar - o propagador LF é o mesmo propagador de Feynman do formalismo SL;
- Campo fermiônico – o propagador LF difere do propagador SL de Feynman por um “propagador instantâneo” (lembrando que estamos em um formalismo de momentum infinito);
- Campo vetorial de massa nula – a componente $A^- = A^0 - A^3$ não é uma variável dinâmica. As variáveis dinâmicas são $A^i, i=1,2$, que obedecem à equação de Klein-Gordon de massa nula. No calibre de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ o propagador do fóton é diferente do propagador SL de Feynman;
- Grupo de Lorentz – dos seis geradores do grupo, quatro são geradores cinemáticos e apenas dois são geradores dinâmicos;
- QED_2 - a eletrodinâmica quântica em duas dimensões, na fixação de calibre LF correspondente a $A^+ = A^0 + A^3 = 0$, tem como momentum P^+ , e como hamiltoniano P^- , que se relacionam pela equação de autovalores $P^+ P^- |\psi\rangle = M^2 |\psi\rangle$. O hamiltoniano tem apenas férmions como graus de liberdade, o que simplifica enormemente a estrutura do espaço de Fock. No limite ultrarrelativístico em que a massa m do férmion do termo de Dirac é infinita ($m \rightarrow \infty$), a equação de autovalores acima tem a solução $M^2 = e^2/\pi$, o resultado já bem conhecido e estudado do Modelo de Schwinger. Este resultado é obtido em LFD a partir da interação de um par férmion-antiférmion, e não é de forma alguma trivial. No limite de massa zero ($m \rightarrow 0$), o divergente da corrente axial quântica é diferente de zero, mostrando a mesma anomalia do modelo de Schwinger quiral encontrada no formalismo SL. A diferença reside em que, no formalismo LF, a corrente $j_5^+ = j^+ = j^0 + j^3$ obedece à equação de Klein-Gordon para um campo escalar massivo com $m^2 = e^2/\pi$.

1.1. CINEMÁTICA RELATIVÍSTICA E AS VARIÁVEIS DE MANDELSTAM

Para o estudo teórico e fenomenológico dos párons, isto é, quarks e glúons, as leis de interação e conservação são usualmente expressas em termos de grandezas relativísticas invariantes, definidas pelo físico sul-africano Sidney Mandelstam (1928-), e conhecidas como **variáveis de Mandelstam**. Faremos antes uma breve recapitulação da estrutura matemática e geométrica da teoria da relatividade especial.

1.1.1. GEOMETRIA DO ESPAÇO DE MINKOWSKI

O espaço vetorial natural para a descrição da cinemática e da dinâmica da relatividade especial é o espaço definido em 1908 pelo matemático polonês Hermann Minkowski (1864-1909), um ex-professor de Einstein. Em 1906, um ano após a publicação do artigo “Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento”, Henri Poincaré descobriu que, acrescentando uma quarta coordenada imaginária *ict* às três coordenadas espaciais cartesianas x, y, z , uma transformação de Lorentz podia ser considerada como uma rotação em um espaço euclidiano quadridimensional. A inclusão de uma coordenada temporal imaginária, porém, fazia com que a métrica desse espaço deixasse de ser positivo-definida e passasse a ser indefinida, e o espaço seria um espaço pseudo-euclidiano, e a rotação seria uma rotação hiperbólica. Minkowski percebeu as diferenças, e as utilizou para demonstrar, primeiramente, a invariância de Lorentz das equações de Maxwell. E, em seguida, reformulou a teoria da relatividade de Einstein nesse novo referencial, transformando a coordenada imaginária em real, e definindo um tensor métrico não-degenerado, representado pela matriz conhecida hoje como a **métrica de Minkowski**:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{onde } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

Esta métrica tem a assinatura $\text{diag}(g_{\mu\nu}) = (+, -, -, -)$, e, em quatro dimensões, é um tensor covariante idêntico à correspondente métrica contravariante: $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$.

Deve-se observar que, alternativamente, pode-se convencionar o uso da métrica com assinatura $\text{diag}(g_{\mu\nu}) = (-, +, +, +)$, onde o sinal menos na coordenada temporal é um remanescente da sua primeira versão imaginária. Esta segunda escolha é a preferida pelos teóricos relativistas gerais, cosmólogos e astrofísicos, conhecida por motivos obscuros como “métrica da Costa Leste” (*East Coast metric*), enquanto a primeira é usada de forma geral pelos teóricos de partícula e campos, e, por oposição, chamada de “métrica da Costa Oeste” (*West Coast metric*).

O espaço de Minkowski, portanto, é um espaço pseudo-euclidiano, seus elementos são chamados de **eventos** ou **quadrivetores**, e é frequentemente representado por $\mathbb{R}^{1,3}$, ou por \mathbb{M}^4 , sendo o exemplo mais simples de uma **variedade pseudo-riemanniana**.

1.1.2. ÁLGEBRA DO ESPAÇO DE MINKOWSKI

A geometria do espaço de Minkowski é definida pela invariância do intervalo que representa uma distância à origem:

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

As transformações de Lorentz derivam dessa invariância, e podemos considerar a cinemática da relatividade especial sendo gerada pelo grupo de todas as transformações de coordenadas que mantêm esse intervalo invariante. Este grupo é chamado de **grupo de Lorentz homogêneo**. O intervalo mais geral, que corresponde a uma distância entre dois pontos quaisquer,

$$s^2(x, y) = (x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2$$

é chamado de **grupo de Lorentz não-homogêneo**, ou de **grupo de Poincaré**. Este grupo contém, além das transformações do grupo de Lorentz homogêneo, as translações e reflexões das coordenadas de tempo e espaço.

Vamos considerar apenas, sem perda de generalidade, o grupo de Lorentz (homogêneo), e adotar a nomenclatura de **covariante** para todas as expressões matemáticas que são invariantes sob a ação deste grupo.

A álgebra desse grupo é uma álgebra tensorial, logo, envolve tensores de todas as ordens, classificados como **escalares** (tensores de ordem zero), **vetores** (tensores de ordem 1) e **tensores** propriamente ditos.

As teorias físicas relativísticas de interesse são **localmente covariantes**, logo, precisamos usar o intervalo infinitesimal

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

Esta equação é simplesmente representada através da métrica de Minkowski, usando-se a **convenção de Einstein** para a soma de índices iguais (os índices mudos inferiores e superiores iguais somados são ditos **contraídos**):

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Desta forma, a contração dos dois tensores métricos $g_{\mu\nu}$ (covariante) e $g^{\mu\nu}$ (contravariante) resultará no delta de Krönecker em quatro dimensões:

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu.$$

Uma vez adotada essa assinatura para a métrica, resultam as duas possíveis representações para um quadrivetor A :

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad (\text{contravariante})$$

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = g_{\mu\nu} A^\nu = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) \quad (\text{covariante}).$$

Há uma explicação para essa nomenclatura: em três dimensões, há os vetores polares, como posição e velocidade, que independem do referencial; e os vetores axiais, ou pseudovetores, cuja imagem especular tem sentido invertido. Para os vetores polares serem invariantes sob uma mudança de referencial, suas componentes precisam variar segundo relações matemáticas inversas, ou contrárias, às que fazem as bases do referencial mudarem. Por isso são chamados de **contravariantes**.

Os operadores diferenciais podem ser representados na mesma notação:

$$\partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla \right)$$

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right)$$

O resultado da ação sobre uma função escalar do operador **gradiente** é um exemplo de um vetor **covariante**. O 4-divergente de um 4-vetor é o invariante de Lorentz:

$$\partial^\alpha A_\alpha = \partial_\alpha A^\alpha = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \nabla \cdot \mathbf{A}$$

No qual se reconhece imediatamente a equação de continuidade de carga elétrica e densidade de corrente, no eletromagnetismo, e do fluxo e densidade de massa de um fluido ideal, em mecânica dos fluidos.

Na representação matricial, o vetor de posição contravariante x^μ corresponde à matriz coluna:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix},$$

e o vetor de posição covariante corresponderá à matriz:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}.$$

Uma transformação de Lorentz sem rotação é chamada de um **boost** (impulso). Usam-se os seguintes símbolos em relatividade especial, com o fim de abreviar as extensas expressões algébricas:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad \beta = |\boldsymbol{\beta}|$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

Nessa notação, a matriz de boost em uma direção e sentido arbitrários será dada por:

$$A_{\text{boost}}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + \frac{(\gamma - 1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma - 1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma - 1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & \frac{(\gamma - 1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma - 1)\beta_2^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma - 1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & \frac{(\gamma - 1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \frac{(\gamma - 1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & 1 + \frac{(\gamma - 1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

Passaremos agora às definições e resultados da cinemática relativística utilizados no estudo das colisões.

1.1.3. REFERENCIAIS DO LABORATÓRIO E DO CENTRO DE MOMENTUM

É bom enfatizar que estamos adotando as unidades naturais $\hbar = c = 1$. Em primeiro lugar, como essas unidades não são empregadas em cosmologia, astrofísica e relatividade geral, que não usam a constante \hbar e não podem abrir mão da velocidade da luz c , isso justifica a existência das duas assinaturas $(+, -, -, -)$ e $(-, +, +, +)$. Em segundo lugar, com essas unidades, as grandezas físicas relativísticas energia, massa e momento linear, relacionadas pela expressão

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

têm a mesma dimensão:

$$[E] = [m] = [p].$$

Nesse caso, em vez de referencial do centro de massa, como é usual em mecânica não-relativística, tanto clássica quanto quântica, é mais conveniente falar de **referencial do centro de momentum**, mas usaremos a terminologia convencional.

Consideremos a seguinte interação entre dois corpos, sendo a o projétil e b o alvo:

$$a + b = c + d + e + \dots$$

No referencial do laboratório (Lab), o mesmo do alvo, o projétil incide com uma energia E^{lab} e um 3-momentum \mathbf{p}^{lab} . Após a colisão, espera-se que as partículas c, d, e, \dots estejam em movimento. No referencial do centro de massa (CM), a soma dos vetores de momentum de todas as partículas nos estados inicial e final deve ser nula. Definem-se os dois referenciais pelas relações:

- Ref. Lab

$$\mathbf{p}_b^{lab} = 0, E_b^{lab} = m_b$$

- Ref. CM

$$\mathbf{p}_a^{CM} + \mathbf{p}_b^{CM} = \mathbf{p}_c^{CM} + \mathbf{p}_d^{CM} + \mathbf{p}_e^{CM} + \dots = 0.$$

Na primeira equação, a massa de repouso da partícula b é m_b .

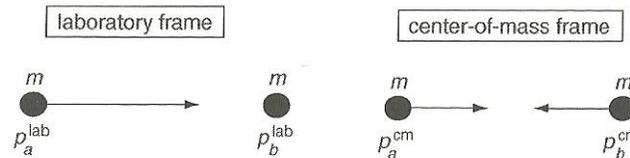
No Ref. CM, as partículas se aproximam com momentum igual e oposto. Somente a energia disponível nesse referencial pode produzir novas partículas, ou, no caso de partículas compostas, excitar graus internos de liberdade.

O instrumento para se obter a relação entre as energias em ambos os referenciais é a invariância de Lorentz. Com esse fim, definimos grandezas físicas que são escalares de Lorentz, logo, invariantes sob transformações de referencial, como a variável de Mandelstam s :

$$s \equiv (p_a + p_b)^2 \equiv (p_a + p_b)_\mu (p_a + p_b)^\mu.$$

Nesta expressão, p_a é o 4-momentum da partícula a e p_b é o 4-momentum da partícula b .

Analisando agora uma colisão entre duas partículas com a mesma massa de repouso m , representada na figura abaixo:



as equações anteriores nos dizem que, no Ref. Lab:

$$p_a^{\text{lab}} = (E^{\text{lab}}, \mathbf{p}^{\text{lab}}),$$

$$p_b^{\text{lab}} = (m, \mathbf{0}),$$

$$s \equiv (p_a + p_b)^2 = (p_a^{\text{lab}} + p_b^{\text{lab}})^2$$

$$= (E^{\text{lab}} + m)^2 - (\mathbf{p}^{\text{lab}})^2 = (E^{\text{lab}} + m)^2 - [(E^{\text{lab}})^2 - m^2]$$

$$= 2mE^{\text{lab}} + 2m^2$$

E que, no Ref. CM:

$$p_a^{\text{cm}} = (E^{\text{cm}}/2, \mathbf{p}^{\text{cm}}),$$

$$p_b^{\text{cm}} = (E^{\text{cm}}/2, -\mathbf{p}^{\text{cm}}),$$

$$s \equiv (p_a + p_b)^2 = (p_a^{\text{cm}} + p_b^{\text{cm}})^2 = (E^{\text{cm}})^2.$$

Igualando esses dois resultados, temos que:

$$E^{\text{lab}} = \frac{(E^{\text{cm}})^2}{2m} - m.$$

No caso ultrarrelativístico que estamos estudando,

$$E^{\text{lab}} \gg m.$$

E a energia no centro de massa $E^{\text{cm}} = \sqrt{s}$ pode ser aproximada em primeira ordem por

$$E^{\text{cm}} = \sqrt{s} \simeq \sqrt{2mE^{\text{lab}}}.$$

Para obtermos finalmente um referencial tridimensional invariável de Lorentz para as colisões relativísticas, vamos definir mais duas variáveis de Mandelstam, correspondentes aos quadrados das transferências de 4-momentum no caso mais simples da colisão $a + b = c + d$, em que somente duas partículas são produzidas:

$$t \equiv (p_a - p_c)^2 = (p_b - p_d)^2,$$

$$u \equiv (p_a - p_d)^2 = (p_b - p_c)^2.$$

As três variáveis s, t, u não são independentes:

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2.$$

1.1.4. RAPIDEZ E PSEUDORRAPIDEZ

A **rapidez** (*rapidity*) é uma variável intensamente usada na análise dos experimentos que envolvem colisões relativísticas e ultrarrelativísticas, e é interpretada como sendo a grandeza análoga à velocidade não-relativística. Como sabemos, a adição de velocidades em mecânica relativística não é linear, portanto, não obedece à soma vetorial comum às mecânicas de Galileu e Newton. Por exemplo, se tomarmos a velocidade v no eixo z , com as componentes v_1 no eixo x e v_2 no eixo y :

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c}}, \quad \text{ou} \quad \beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}.$$

Nessas expressões, como usualmente, $\beta \equiv v/c = v$.

Vamos agora introduzir uma função $y \equiv y(\beta)$ que faça com que a lei de adição de y seja linear, sob a condição acima para β . Usando um resultado das funções hiperbólicas:

$$\tanh^{-1} \beta_1 \pm \tanh^{-1} \beta_2 = \tanh^{-1} \frac{\beta_1 \pm \beta_2}{1 \pm \beta_1 \beta_2}$$

obtemos de imediato a definição da **rapidez** y :

$$y = \tanh^{-1} \beta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}.$$

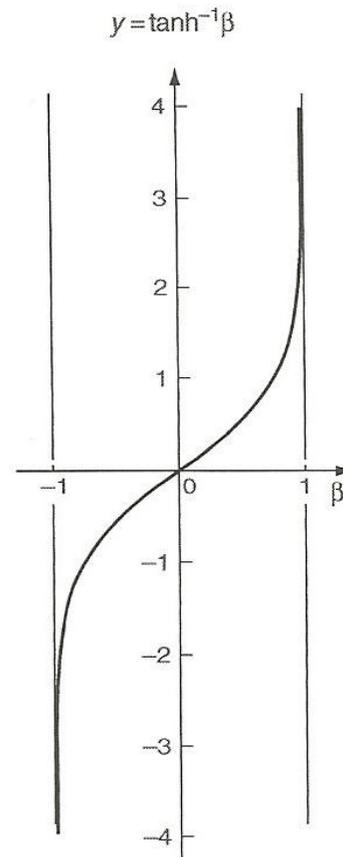
A razão porque a rapidez é um análogo relativístico da velocidade é que, para $\beta \ll 1$, $y \simeq \beta$. E, uma vez que $\beta = p_z/E$, podemos expressar a definição da rapidez de outra forma, em termos do momentum longitudinal p_z :

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z}.$$

Um boost de Lorentz ao longo do eixo z de um referencial y para um referencial y' causa uma mudança na rapidez de uma forma aditiva simples:

$$y' = y + \tanh^{-1} \beta.$$

A figura abaixo é um gráfico da rapidez em função de β :



A distribuição de uma partícula após um espalhamento relativístico é invariante, desde que seja expressa em função da rapidez y .

Podemos ainda definir o **momentum transversal** p_T e o **momentum longitudinal** p_z para uma partícula com massa de repouso m e 3-momentum $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ através das expressões:

$$p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = |\mathbf{p}| \sin \theta, \quad p_z = |\mathbf{p}| \cos \theta.$$

(θ é o ângulo polar do vetor \mathbf{p} em relação ao eixo z).

Podemos agora ir mais longe e definir a massa transversal m_T como sendo:

$$m_T^2 = p_T^2 + m^2.$$

Logo,

$$E^2 = p_z^2 + m_T^2, \quad \text{e} \quad y = \ln \frac{E + p_z}{m_T}.$$

O quadrimomentum p^μ pode então ser parametrizado como:

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, p_x, p_y, p_z) = (m_T \cosh y, p_T \cos \phi_p, p_T \sin \phi_p, m_T \sinh y).$$

Esta parametrização é ultrarrelativística, e continua válida mesmo para uma partícula off-shell e time-like, se

$$m^2 \equiv p^2.$$

A **pseudorrapidez** η é equivalente à rapidez y nas colisões ultrarrelativísticas em que $E \gg m$, e é definida como:

$$\eta = -\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right).$$

Pode ser detectada experimentalmente pela simples medida do ângulo entre a partícula produzida e o feixe incidente, e sua importância reside precisamente no fato de que as grandezas diretamente mensuráveis em uma colisão relativística são a energia e o ângulo de espalhamento.

1.1.5. CINEMÁTICA E DINÂMICA NO CONE DE LUZ

A cinemática mais apropriada para se discutir o espalhamento em altas energias usa coordenadas no cone de luz (LC). Seja z o eixo longitudinal da colisão. Para um quadrivetor arbitrário $v^\mu = (v^0, v^1, v^2, v^3)$, definimos as coordenadas LC como:

$$v^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 + v^3), \quad v^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 - v^3), \quad v_\perp \equiv (v^1, v^2).$$

Em particular, nos referiremos a $x^+ = (t + z)/\sqrt{2}$ como o “tempo” LC, e a $x^- = (t - z)/\sqrt{2}$ como a “coordenada longitudinal” LC. O produto escalar invariante de dois quadrivetores será:

$$p \cdot x = p^- x^+ + p^+ x^- - p_\perp \cdot x_\perp,$$

o que sugere que p^- pode ser interpretado como a energia LC, e p^+ como o momentum longitudinal LC. Em particular, uma vez que $p^\pm = (1/\sqrt{2})(E \pm p_z)$, onde $E = (m^2 + p^2)^{1/2}$, a relação de dispersão LC toma a forma:

$$p^- = \frac{1}{2} \frac{p_\perp^2 + m^2}{p^+} = \frac{1}{2} \frac{m_\perp^2}{p^+},$$

onde a massa transversa m_\perp é definida como $m_\perp^2 = p_\perp^2 + m^2$.

No espaço de momentum, a rapidez assume a expressão simplificada:

$$y \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{p^+}{p^-} = \frac{1}{2} \ln \frac{2p^{+2}}{m_{\perp}^2}.$$

Essas definições são úteis, entre outras razões, por suas propriedades simples sob boosts de Lorentz longitudinais: $p^+ \rightarrow \kappa p^+$, $p^- \rightarrow (1/\kappa) p^-$, onde κ é uma constante. Em um boost, a rapidez sofre simplesmente uma translação de valor constante: $y \rightarrow y + \kappa$.

A utilidade da cinemática LC vai além de uma transformação de coordenadas conveniente. A dinâmica hamiltoniana das TQC quantizadas no cone de luz apresenta várias propriedades notáveis, como já vimos, e que foram apontadas primeiramente por Dirac. Por exemplo, o hamiltoniano LC p^- , que é o gerador de translações ao longo do tempo LC x^+ , pode ser escrito como $p^- = p_0^- + V$, onde p_0^- é o hamiltoniano livre, correspondente a um conjunto completo de autoestados não interagentes no espaço de Fock, e V é o potencial LC. O vácuo LC é trivial, no sentido de que é um autoestado tanto do hamiltoniano livre quanto do hamiltoniano com interação. Em consequência dessas duas propriedades, estados de Fock com pártos múltiplos podem ser construídos como autoestados do hamiltoniano da QCD. Desta forma, no calibre LC $A^+ = 0$, a representação quark-párton da QCD se torna manifesta. E, finalmente, observa-se que a estrutura aparentemente não relativística do hamiltoniano LC sugerida pela relação de dispersão mostrada acima não é acidental, mas resulta do isomorfismo exato entre o subgrupo LC (8 geradores) do grupo de Poincaré (10 geradores) e o grupo de simetria galileano da mecânica quântica bidimensional (6 geradores) (Susskind, Phys. Rev. 165-5 (1968) 1535). Advém daí uma simplificação adicional: a teoria de perturbação de Rayleigh-Schrödinger – com denominadores de energia off-shell, evidentemente – pode ser usada na quantização LC, substituindo o formalismo covariante das regras de Feynman, sem perda de generalidade.

2. QGP: UMA INTRODUÇÃO FENOMENOLÓGICA

O estágio de conhecimento atual da física de partículas está sintetizado no Modelo Padrão, um esquema descritivo e classificatório, segundo o qual, há 61 partículas elementares constitutivas da matéria e de suas interações, como mostra a tabela abaixo:

Elementary Particles					
	<u>Types</u>	<u>Generations</u>	<u>Antiparticle</u>	<u>Colors</u>	Total
<u>Quarks</u>	2	3	Pair	3	36
<u>Leptons</u>	2	3	Pair	None	12
<u>Gluons</u>	1	1	Own	<u>8</u>	8
<u>W</u>	1	1	Pair	None	2
<u>Z</u>	1	1	Own	None	1
<u>Photon</u>	1	1	Own	None	1
<u>Higgs</u>	1	1	Own	None	1
Total					61

Os resultados experimentais analisados nos últimos 20 anos em colisores de altas energias sugerem que, além dos estados da matéria conhecidos anteriormente, devidos essencialmente às interações eletromagnéticas entre átomos e moléculas, e de suas respectivas transições de fase, existem novos estados e transições de fase associados às interações fortes, envolvendo quarks e glúons. O plasma de quarks e glúons é um exemplo de um sistema complexo dessas partículas, em condições microscópicas extremas de temperatura e pressão, e o estudo de suas configurações e possíveis transições de fase tem interesse não somente neste caso, mas porque pode contribuir para o entendimento de todos os casos de sistemas complexos em geral.

A teoria fundamental que descreve a dinâmica das interações entre quarks e glúons é a **Cromodinâmica Quântica** (QCD), que sugere que a matéria nuclear comum, composta de prótons e nêutrons, está sujeita a **transições de fase**: para

temperaturas maiores do que $10^{12} K$, a fase correspondente é a de um plasma quente de quarks e glúons; e para densidades maiores do que $10^{12} kg \cdot cm^{-3}$, torna-se em um plasma frio composto por quarks.

2.1. LIBERDADE ASSINTÓTICA E CONFINAMENTO EM QCD

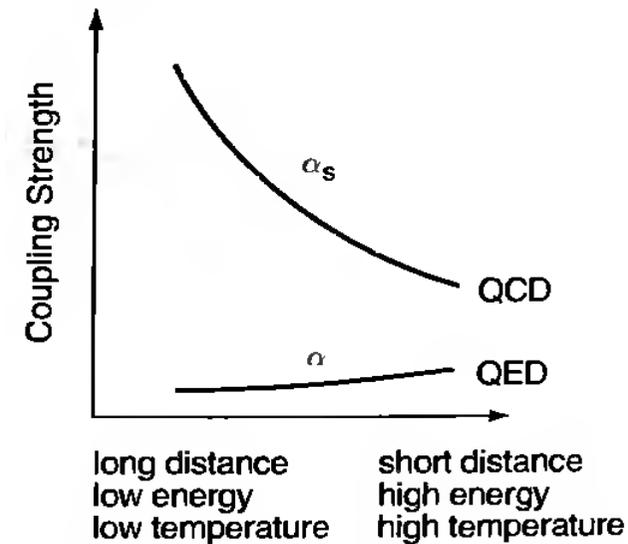
Sabe-se que um átomo de hidrogênio é composto por um próton e um elétron. Embora o elétron, na resolução experimental atual, seja considerado uma partícula pontual, verificou-se que o próton é composto por três quarks. Os quarks apresentam seis graus de liberdade de energia, ou sabores – u, d, s, c, b, t – e três graus de liberdade de carga, ou cores – R, G, B. Os hádrons, isto é, as partículas compostas que interagem através da força nuclear forte, contêm quarks em combinações que tornam a cor resultante invisível, ou “branca”. Os bárions têm três quarks, os quais, por analogia com a composição química dos átomos, são chamados de **quarks de valência**, e os mésons são formados por um par quark-antiquark. A QCD foi proposta em 1966 por Yoichiro Nambu (1921-), e é uma generalização da Eletrodinâmica Quântica (QED), em que o bóson de calibre mediador da interação eletromagnética, o fóton, é substituído pelo bóson de calibre mediador da interação forte, o glúon, ambos sem massa e com spin 1. Diferentemente do fóton, porém o glúon não é neutro, e está sujeito a autointerações através das cores. A tabela abaixo ilustra uma possível comparação entre as duas teorias:

	QED	QCD
Matter fermions	charged leptons, e.g. e^- , e^+	quarks q^β, \bar{q}^β ($\beta = R, B, G$)
Gauge bosons	photon (γ) A_μ	gluons (g) A_μ^a ($a = 1, 2, \dots, 8$)
Gauge group	U(1)	SU(3)
Charge	electric charge (e)	color charge (g)
Coupling strength	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = O(10^{-2})$	$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi\hbar c} = O(1)$

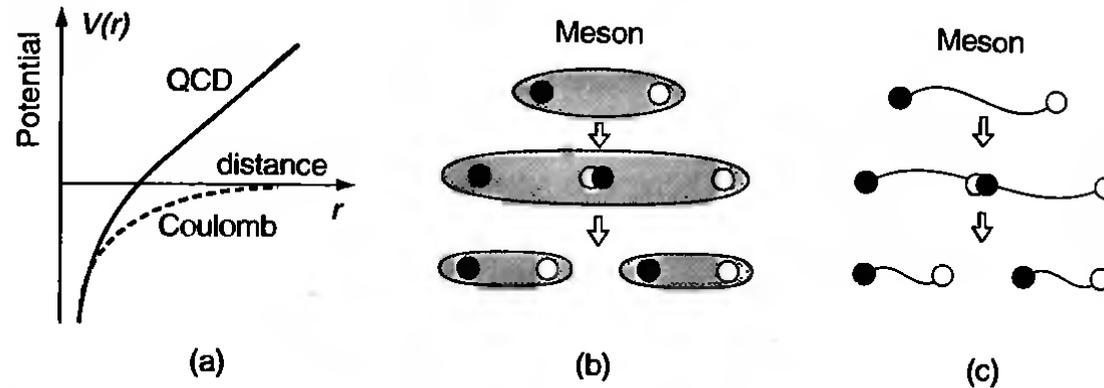
A possibilidade da existência de bósons de calibre com carga, e, portanto, sujeitos a auto-interações, foi introduzida teoricamente em 1954, por Chen Ning Yang (1922-) e Robert Mills (1927-1999), que propuseram a primeira teoria de calibre não comutativa (ou não abeliana) baseada no grupo de isospin $SU(2)$. Como os campos de Yang-Mills teriam obrigatoriamente massa nula, para conservar a invariância de calibre da teoria, Wolfgang Pauli declarou a hipótese como inválida, até que, a partir de 1961, Nambu, Jeffrey Goldstone e Giovanni Jona-Lasinio descobrissem o conceito de aquisição de massa para campos não comutativos a partir de uma quebra espontânea de simetria. Steven Weinberg, Abdus Salam e Sheldon Glashow conseguiram, com essa nova visão, unificar a QED com a teoria das interações nucleares fracas na chamada Teoria Eletrofraca, na qual o grupo de simetria de calibre é $SU(2) \times U(1)$, e os bósons de calibre são o fóton γ (sem massa e com simetria abeliana $U(1)$) e as partículas W^+, W^-, Z^0 (com massa e simetria não abeliana $SU(2)$). Em 1965, Moo-Young Han (1934-), Yoichiro Nambu e Oscar Greenberg (1932-) propuseram, de forma independente, o grupo de simetria $SU(3)$ para acrescentar um grau de liberdade aos quarks – a carga **cor** -, uma vez que fora observado o bárion pesado Δ^{++} , constituído por três quarks com spins paralelos, violando o princípio de exclusão de Pauli. Han e Nambu observaram também que os agentes das interações entre os quarks seriam oito bósons de calibre: os glúons. O Modelo Padrão atual, então, admite que o conjunto formado pelos férmions elementares, isto é, quarks e léptons, e pelos bósons de calibre da Teoria Eletrofraca e da QCD, se combine como um grupo de simetria total $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, produzindo todas as partículas de matéria e suas interações conhecidas – excetuando-se a interação gravitacional, ainda não incorporada ao Modelo.

A QCD, uma teoria de calibre não abeliana baseada no grupo de simetria $SU(3)$, descreve duas propriedades exclusivas da interação forte entre quarks e glúons: a **liberdade assintótica** e o **confinamento**. A primeira propriedade foi descoberta em 1973 e publicada no mesmo número de 25 de junho da revista Physical Review Letters pelos físicos americanos David Gross e Frank Wilczek, em um trabalho conjunto, e David Politzer, de forma independente. Significa que, a altas energias, quarks e glúons interagem fracamente, e, quanto maior a energia, mais se mostram livres. Ou, vindo de outro ponto de vista, mas equivalente: quanto mais de perto se procura observar a **carga nua de cor** de um glúon ou quark, menor ela se torna. É o fenômeno da **antiblindagem de cor**, inverso ao de **blindagem de carga elétrica**, o qual é observado

em relação à carga nua eletromagnética da QED: quanto mais nos aproximamos, maior ela se torna. Na QED, a blindagem de carga (*charge screening*) pode ser explicada pela nuvem positiva de pósitrons virtuais que cercam um elétron real situado na origem, uma vez que pósitrons, elétrons e fótons virtuais são criados e destruídos constantemente pelas flutuações do vácuo quântico. Já na QCD, só dispomos para testar uma carga nua colorida de outra carga colorida, que com ela interage: quanto mais nos aproximamos, em uma escala de distância cinco ordens de grandeza menor que na QED, menos sabemos se observamos a carga nua colorida localizada na origem ou a carga colorida de teste, ou qualquer outra surgida do vácuo, ou seja, a blindagem se dilui, e desaparece até não restar carga nua alguma. A figura abaixo mostra comparativamente os comportamentos das constantes de acoplamento da QED e da QCD:



O confinamento se manifesta experimentalmente pela impossibilidade de se observar uma carga colorida livre, e pode ser descrito graficamente nas três figuras abaixo:



Em (a), a linha cheia descreve a curva de potencial, em função da distância, entre um quark e um antiquark na QCD, e a linha tracejada o potencial coulombiano gerado por uma carga elétrica. A figura (b) esquematiza o confinamento de um quark e um antiquark, cercados por uma nuvem de campos de glúons. Em (c), a configuração de glúons é aproximada por uma corda com tensão constante, que, para grandes separações, pode se romper, sem, no entanto, liberar as cargas coloridas originais. Em vez disso, agrega novas cargas de cores complementares às extremidades dos fragmentos das cordas, de forma a que a partícula resultante não tenha cor, seja “branca”.

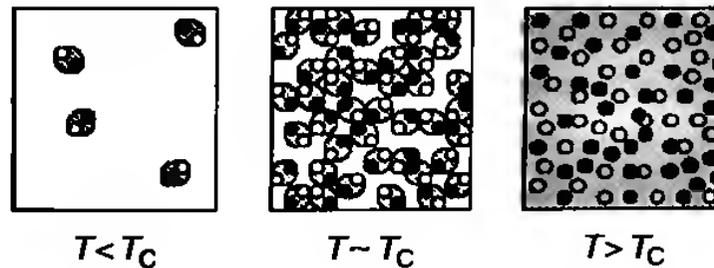
2.2. QUEBRA DE SIMETRIA QUIRAL EM QCD

Outro importante aspecto da QCD que se deve ao forte acoplamento em baixas energias é a **quebra dinâmica de simetria quiral**. A teoria BCS (Bardeen, Cooper e Schrieffer, 1957) de um metal supercondutor, segundo a qual pares de elétrons com spins contrários se acoplam abaixo de certa temperatura crítica de transição de fase, como se fossem um bóson composto, explica porque uma corrente injetada no metal sob essas condições não encontra resistividade, permanecendo circulando continuamente. Por analogia, Nambu e Jona-Lasinio interpretaram em 1960-1961 o vácuo da QCD como um **supercondutor relativístico**, no qual pares de quarks q e antiquarks \bar{q} se condensam aos pares, com uma intensidade de condensação medida pelo valor esperado no vácuo (VEV) $\langle \bar{q}q \rangle$, considerando este valor, de acordo com a teoria geral das transições de fase, criada por Landau em 1937, como um **parâmetro de ordem**. Segundo essa hipótese, as massas dos hádrons leves, como o próton, o nêutron e alguns mésons, estariam intimamente relacionadas ao valor não nulo de $\langle \bar{q}q \rangle$, e, também, assim como ocorre com os supercondutores, deve existir uma transição de fase a uma temperatura finita T_c , acima da qual a fase “normal” observada no nosso cotidiano se restabelece, alterando drasticamente tanto aquela condensação quanto os espectros das partículas observadas.

2.3. COMO SE FORMA O QGP

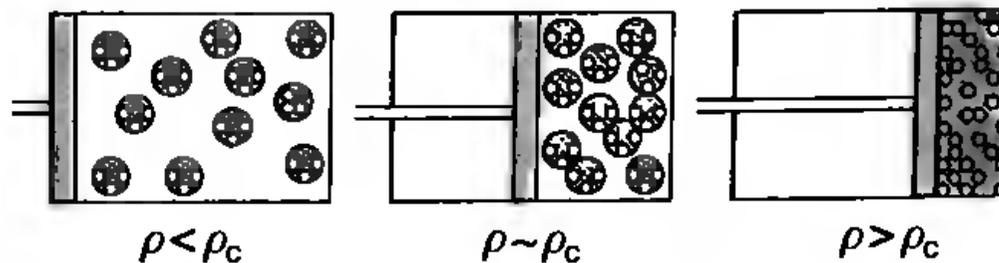
A liberdade assintótica sugere imediatamente dois métodos para a criação do plasma de quarks e glúons (QGP).

(i) Produção de QGP a uma alta temperatura T . Imaginemos o vácuo da QCD superaquecido dentro de uma caixa, como na figura.



A baixas temperaturas, os hádrons mais leves, como píons e káons, são excitados a partir do vácuo, e como têm aproximadamente a mesma dimensão $\sim 1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}$, acima de uma certa temperatura crítica T_C eles começam a se superpor mutuamente, até que o sistema de hádrons se dissolva em um sistema puramente de quarks e glúons, o QGP, onde o número de quarks n_q deve ser exatamente igual ao número de antiquarks $n_{\bar{q}}$, uma vez que ambos foram produzidos por flutuações do vácuo. Os vários modelos e as simulações computacionais dão o valor dessa temperatura crítica como sendo $T_C = 150 \sim 200\text{MeV}$. Embora seja uma temperatura extremamente alta ($1\text{eV} = 1,16 \times 10^4\text{K}$), se comparada, por exemplo, com a temperatura no centro do Sol: $1,5 \times 10^7\text{K} = 1,3\text{keV}$, é uma energia típica das interações fortes, e pode ser facilmente atingida em laboratórios de altas energias. Usaremos a escala de energia $\Lambda_{QCD} \sim 200\text{MeV}$ com frequência;

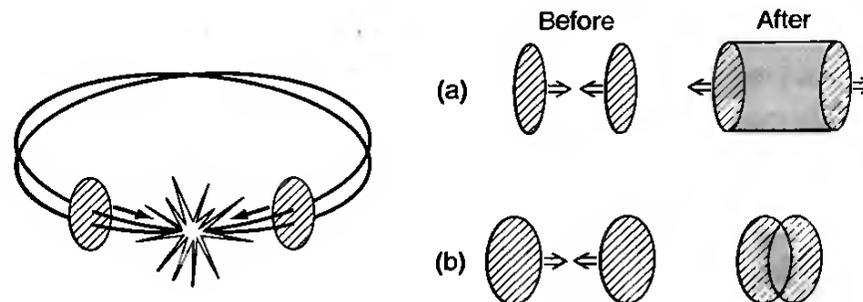
(ii) Produção de QGP a uma alta densidade bariônica. Imaginemos um grande número de bárions, com $T = 0$, em um cilindro com um pistão, e vamos comprimir o sistema adiabaticamente, mantendo $T \sim 0$. Acima de certa densidade bariônica crítica ρ_C os bárions começam a se superpor, dissolvendo-se em uma espécie de matéria degenerada de quarks. Na matéria de quarks produzida desta forma, $n_q \gg n_{\bar{q}}$, na mesma proporção média encontrada entre matéria e antimatéria no Universo. Acredita-se que este processo se dê no interior de estrelas de quarks, cujo núcleo seria composto por quarks u, d, s em quantidades iguais, uma vez que é possível mostrar (E. Witten, *Phys.Rev.D* 30 (1984) 272) que a energia dessa matéria u, d, s , ou **matéria estranha**, após um colapso gravitacional, é inferior à de um núcleo de Fe, o elemento que forma os núcleos das estrelas menos densas que as estrelas de nêutrons. A figura abaixo ilustra de forma esquemática esse processo.



2.4. ONDE ENCONTRAR O QGP

Com base nos dois processos expostos acima de formação, poderíamos esperar encontrar o QGP em três situações: (i) no Universo primordial (fora de questão, obviamente); (ii) no centro de estrelas compactas (difícil, senão impossível de se observar, direta ou indiretamente) e (iii) no estágio inicial de colisões em altas energias de núcleos pesados. Este estágio é o que nos interessa diretamente, e que passaremos a estudar em detalhe.

O estágio inicial de uma colisão relativística entre núcleos pesados é chamado, por analogia com a teoria atual da formação do Universo, de “Little Bang”, e é obtido por meio de aceleradores de íons pesados, como o RHIC – Relativistic Heavy Ion Collider, no Laboratório Nacional de Brookhaven, e o ALICE – A Large Ion Collider Experiment, um dos experimentos do LHC – Large Hadron Collider, no CERN, na Suíça. O RHIC faz colisões entre núcleos de ouro (Au-Au, $A=197$), e o ALICE entre núcleos de chumbo (Pb-Pb, $A=207$), de forma frontal, a energias relativísticas/ultrarrelativísticas. A essas energias, a contração de Lorentz causa um achatamento dos núcleos na direção das velocidades (no RHIC, o diâmetro longitudinal do núcleo é contraído 300 vezes; no LHC, até 2.700 vezes), o que fez com que Feynman apelidasse as geometrias resultantes de “panquecas”, como mostra a figura abaixo:

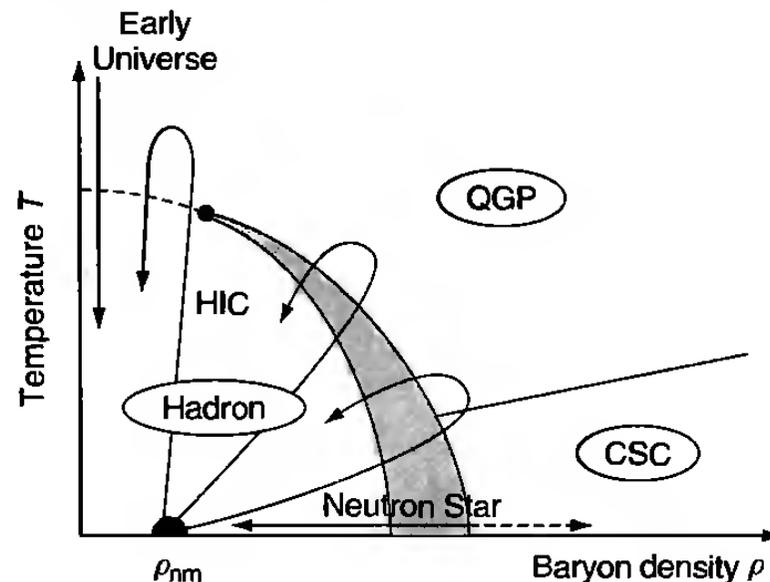


(Para visualizar melhor os íons pesados colidindo, podemos adaptar brevemente a descrição de Feynman para “pizzas”, onde os núcleons seriam as azeitonas, as rodelas de calabresa, etc.)

Nas colisões do tipo (b), ditas **relativísticas**, os dois núcleos se fundem em uma região intermediária com maior densidade bariônica do que cada um, de acordo com um parâmetro chamado **poder de frenamento nuclear**. Nas colisões do tipo (a), **ultrarrelativísticas**, os núcleos estão tão achatados e energéticos que se atravessam, segundo um parâmetro denominado de

transparência nuclear, deixando (muito) brevemente entre eles uma região de baixa densidade bariônica, mas de alta temperatura e grande densidade de energia. A fronteira de energia per nucleon entre (a) e (b) é da ordem de 100 GeV, e é acima dessa densidade que o RHIC e o LHC trabalham. A teoria das colisões do tipo (b) foi desenvolvida por Lev Landau, na década de 1950, e a do tipo (a), necessária para os experimentos atuais, se deve inicialmente aos trabalhos teóricos pioneiros sobre **pártons**, em 1975-1977, produzidos por Richard Feynman e James Bjorken.

Abaixo, um diagrama esquemático, em termos da temperatura absoluta T e da densidade bariônica ρ , das fases da QCD, onde CSC – Color SuperConductivity – representa a fase de supercondutividade colorida do vácuo da QCD, com parâmetro de ordem $\langle \bar{q}q \rangle$; HIC representa a região das colisões de íons pesados; e ρ_{nm} é a densidade bariônica da matéria nuclear normal. É importante ressaltar que este diagrama resulta de algumas escolhas teóricas e fenomenológicas razoáveis, mas arbitrárias: o modelo NJL, de Nambu-Jona-Lasinio, o modelo de instantons para interações entre quarks, e a existência de apenas dois quarks com massas nulas.



2.5. EVIDÊNCIAS DO QGP EM COLISÕES RELATIVÍSTICAS DE ÍONS PESADOS

As colisões relativísticas de íons pesados são processos dinâmicos com escalas de distância da ordem de $10\text{ fm} - 10^{-14}\text{ m}$ - e escalas de tempo da ordem de $10\text{ fm}/c - 10^{-7}\text{ s}$. A ordem de grandeza da dimensão típica de um átomo, ou do comprimento de onda de um fóton de luz visível, é 10^4 vezes maior que essa escala de distância: é como comparar a distância entre Rio e S. Paulo com a terça parte da ponte Rio-Niterói. Por dependerem de alta precisão e alta acurácia dos medidores, as localizações exatas das linhas e pontos críticos, e, logo, a própria estrutura dessas transições de fase, continuam a ser intensivamente pesquisadas.

Desde aproximadamente o ano 2000, com o acúmulo de dados e o aprofundamento das análises mais recentes dos resultados obtidos pelo RHIC, porém, algumas suposições teóricas vêm sendo confirmadas, total ou parcialmente, e refinadas e levadas mais a sério com a entrada no cenário do ALICE a partir de 2011. A menos surpreendente delas é que o QGP não é um gás de quarks e glúons livres, como o desconfinamento poderia levar a crer, mas um sistema dinâmico fortemente interativo com características próprias, ainda não muito bem entendidas. E a mais espantosa é que, ao que tudo indica, o QGP se comporta como um fluido perfeitamente incompressível, de viscosidade nula, um **superlíquido** – se quisermos usar a analogia com a supercondutividade de alguns metais e com a superfluidez de outros tantos gases nobres, **isotrópico**, ou seja, sem direções preferenciais. Veremos mais à frente que é necessário generalizar – mais uma vez Landau foi um pioneiro nesse processo de construção de uma teoria - o caso particular da hidrodinâmica clássica de Bernoulli, Navier e Stokes para os casos de um fluido relativístico e ultrarrelativístico, para que possamos obter modelos teóricos da dinâmica do QGP que sejam aceitáveis e condizentes com os resultados experimentais.

3. A TRANSIÇÃO DE FASE QUARK-HÁDRON EM ALTAS TEMPERATURAS

As observações e resultados anteriores sugerem que o vácuo da QCD experimenta uma transição de fase entre hádrons e quarks para certos valores da temperatura T e da densidade bariônica ρ , nas proximidades da escala de energia $\Lambda_{QCD} \sim 200MeV$, na qual a constante de acoplamento α_s , de acordo com a liberdade assintótica, se torna pequena, possibilitando assim a ocorrência do desconfinamento de quarks e glúons. Veremos a seguir os conceitos básicos de transição de fase quark-hádron para altas temperaturas, correspondendo ao caso das colisões frontais relativísticas/ultrarelativísticas entre íons pesados.

3.1. A TERMODINÂMICA BÁSICA DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS QUÂNTICAS

Em baixas temperaturas T e pequenas densidades bariônicas ρ a QCD apresenta como características o confinamento de quarks e glúons e a quebra espontânea de simetria quiral, ambas intimamente relacionadas à estrutura não perturbativa do vácuo da QCD. Por outro lado, se T e/ou $\rho^{1/3}$ são muito maiores que o parâmetro de escala típico da QCD $\Lambda_{QCD} \sim 200MeV$, a constante corrente de acoplamento $\alpha_s(\kappa \sim T, \rho^{1/3})$ se torna pequena, por força da liberdade assintótica. Segundo uma suposição adicional sugerida em 1975 por Collins e Perry (Phys. Rev. 34, 1353), a força colorida de longo alcance (lembramos que o glúon tem massa nula) seria blindada pelo plasma e se tornaria de curto alcance. Esperava-se que, neste caso, o sistema se comportasse com um gás fracamente interagente de quarks e glúons, o QGP. A partir dos anos 1990, porém, os dados acumulados por experimentos com íons pesados, principalmente as colisões Au+Au realizadas no RHIC em Brookhaven, apontaram em outra direção, já sugerida por Shuryak a partir de 1978: o QGP se aproxima não de um gás, mas de um fluido com viscosidade nula, sugerindo assim um regime fortemente interagente de quarks e glúons. Os resultados mais recentes do experimento Alice que vem sendo realizado no LHC confirmam essa interpretação. Para estudar a transição de fase quark-hádron, porém, a QCD possui mais ferramental direcionado para a hipótese do gás, e iniciaremos deste ponto de vista. A segunda interpretação será mais eficazmente estudada com a aplicação da teoria da hidrodinâmica relativística, primeiramente desenvolvida por Landau, na dinâmica do cone de luz, inicialmente no contexto da *current álgebra*, por

Weinberg, Feynman, Bjorken, Paschos e outros, e na atualidade por Brodsky, Lepage e outros, que estudam a dinâmica dos estados ligados de quarks e glúons no referencial do cone de luz..

Em primeiro lugar, recordaremos algumas relações estatísticas e termodinâmicas básicas, encontráveis nos melhores livros-textos de física estatística.

Vamos introduzir para um sistema em equilíbrio termodinâmico a temperatura T , com volume V e potencial químico μ , o operador densidade grã-canônico $\hat{\rho}$, a função de partição grã-canônica $Z(T, V, \mu)$ e o grande potencial $\Omega(T, V, \mu)$, no sistema de unidades natural $k_B = \hbar = c = 1$:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \frac{1}{Z} e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})/T}, \\ Z(T, V, \mu) &= \text{Tr} e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})/T} \\ &= \sum_n \langle n | e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})/T} | n \rangle \equiv e^{-\Omega(T, V, \mu)/T}.\end{aligned}$$

Os operadores hamiltoniano e número são representados nesta expressão, respectivamente, por \hat{H} e \hat{N} ($\hat{N} = a^\dagger a$). O traço Tr é calculado sobre um conjunto completo de estados quânticos indexados por n . Por definição de operador densidade, $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$. Podemos definir também um operador entropia:

$$\hat{S} = -\ln \hat{\rho}.$$

Uma vez que, por definição, a média térmica de um operador arbitrário \hat{O} é dada por $\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{O}]$, podemos obter a energia média E , o número médio de partículas N e a entropia média S :

$$E = \langle \hat{H} \rangle, \quad N = \langle \hat{N} \rangle, \quad S = \langle \hat{S} \rangle = -\text{Tr}[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}].$$

Combinando esses conjuntos de equações e definições com a equação de definição de pressão

$$P = -d\Omega/dV|_{T,\mu}$$

temos as seguintes relações termodinâmicas:

$$\Omega(T, V, \mu) = E - TS - \mu N,$$

$$d\Omega = -S dT - P dV - N d\mu,$$

$$dE = T dS - P dV + \mu dN.$$

A terceira relação acima nada mais é do que a **primeira lei da termodinâmica** do sistema de partículas, e é uma consequência imediata das duas expressões anteriores.

Para considerarmos um sistema com um número fixo de partículas e/ou pressão constante, são de grande utilidade a energia livre de Helmholtz $F(T, V, N)$ e a energia livre de Gibbs $G(T, P, N)$. Essas duas grandezas diferem do grande potencial $\Omega(T, V, \mu)$ somente pelas variáveis independentes, logo, podem ser obtidas deste por transformações de Legendre:

$$F(T, V, N) = \Omega + \mu N = E - TS,$$

$$dF(T, V, N) = -S dT - P dV + \mu dN,$$

$$G(T, P, N) = F + PV,$$

$$dG(T, P, N) = -S dT + V dP + \mu dN.$$

O grande potencial $\Omega(T, V, \mu)$ e a energia livre de Gibbs $G(T, P, N)$ possuem somente uma variável extensiva, respectivamente, V e N , logo, são forçosamente proporcionais a cada uma das variáveis, e os respectivos coeficientes, que são variáveis intensivas, são facilmente extraídos das relações acima:

$$\Omega = -PV, \quad G = \mu N.$$

Quando o sistema de partículas é uniforme espacialmente, ou homogêneo, é conveniente introduzir as densidades de energia $\varepsilon = E/V$, de número $n = N/V$ e de entropia $s = S/V$, e, juntamente com as expressões acima para Ω e G , resultam na seguinte forma para as relações termodinâmicas principais:

$$-P = \varepsilon - Ts - \mu n,$$

$$dP = s dT + n d\mu,$$

$$d\varepsilon = T ds + \mu dn.$$

Também podemos introduzir as seguintes relações envolvendo a função de partição:

$$\varepsilon = \frac{T}{V} \left(\left. \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln T} \right|_{V,\mu} + \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln \mu} \right|_{V,T} \right), \quad P = T \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right|_{T,\mu},$$

$$s = \frac{1}{V} \left(1 + \frac{\partial}{\partial \ln T} \right) \ln Z \Big|_{V,\mu}.$$

A **segunda lei da termodinâmica**, ou o **princípio de crescimento da entropia**, implica, se os argumentos forem fixados, que as funções $\Omega(T, V, \mu)$, $F(T, V, N)$ e $G(T, P, N)$ apresentam mínimos no estado de equilíbrio.

Quando a temperatura do sistema se aproxima de zero, somente uns poucos estados quânticos estão disponíveis para a soma que define a função de partição Z (de *Zustandsumme*, “soma sobre estados”). Resulta daí a **terceira lei da termodinâmica**:

$$S_{T \rightarrow 0} = - \frac{\partial \Omega}{\partial T} \rightarrow cte.$$

3.2. SISTEMA DE PARTÍCULAS NÃO INTERAGENTES

A função de partição grã-canônica para bósons massivos não interagentes com d graus de liberdade é dada por:

$$Z_{\text{B}} = \prod_k \left(\sum_{l=0}^{\infty} e^{-l(E(k)-\mu)/T} \right)^d = \prod_k \left(1 - e^{-(E(k)-\mu)/T} \right)^{-d}$$

Nesta expressão o produtório infinito percorre todos os possíveis estados de momentum, e l é o número de ocupação para cada estado com energia igual a:

$$E(k) = \sqrt{k^2 + m^2}.$$

No caso das antipartículas, μ é substituído por $-\mu$. A função Z_n será finita sempre que $\mu \leq m$. O caso particular $\mu = m$ está relacionado ao condensado de Bose-Einstein (BEC).

A expansão do grande potencial em termos de m/T é:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{B}}(T, V, 0)/V &= -d \left[\frac{\pi^2}{90} T^4 - \frac{m^2 T^2}{24} + \frac{m^3 T}{12\pi} + \frac{m^4}{64\pi^2} \left(\ln \left(\frac{m^2}{(4\pi T)^2} \right) + C \right) + \dots \right], \\ \Omega_{\text{F}}(T, V, 0)/V &= -\frac{7}{8} d \left[\frac{\pi^2}{90} T^4 - \frac{m^2 T^2}{42} - \frac{m^4}{56\pi^2} \left(\ln \left(\frac{m^2}{(\pi T)^2} \right) + C \right) + \dots \right], \end{aligned}$$

onde

$$C = 2\gamma - 3/2 \simeq -0.346,$$

e a constante de Euler γ é dada por

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} = 0.5772156649 \dots$$

Logo, para $\mu = 0$ o grande potencial é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_{\text{B}}(T, V, 0)}{V} &= d \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \ln(1 - e^{-E(k)/T}) \\ &= -d \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \frac{1}{e^{E(k)/T} - 1} \\ &\xrightarrow{m=0} -d \frac{\pi^2}{90} T^4, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{v} = \partial E / \partial \mathbf{k} = \mathbf{k} / E$ é a velocidade da partícula. A expressão intermediária acima conduz a uma interpretação intuitiva da pressão,

$$P = -\Omega/V,$$

como sendo a média de transferência, por unidade de tempo, do momentum perpendicular à unidade de área de uma parede do volume fechado que contém a partícula.

É imediato verificar que a **lei de Stefan-Boltzmann**, ou seja, a lei da radiação de corpo negro do fóton, corresponde na expressão final acima a fazer $d = 2$, ou seja, a assumir dois sentidos possíveis de polarização.

A função de partição grã-canônica para férmions massivos não interagentes com d graus internos de liberdade é dada por:

$$Z_{\text{F}} = \prod_k \left(\sum_{l=0,1} e^{-l(E(k)-\mu)/T} \right)^d = \prod_k \left(1 + e^{-(E(k)-\mu)/T} \right)^d,$$

onde d representa o spin e demais graus de liberdade do férmion. Também neste caso, para antipartículas, μ deve ser substituído por $-\mu$.

No caso em que $\mu = 0$, o grande potencial fermiônico será igual a:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_F(T, V, 0)}{V} &= -d \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \ln(1 + e^{-E(k)/T}) \\ &= -d \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{3} v \cdot k \frac{1}{e^{E(k)/T} + 1} \\ &\xrightarrow{m=0} -d \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{90} T^4. \end{aligned}$$

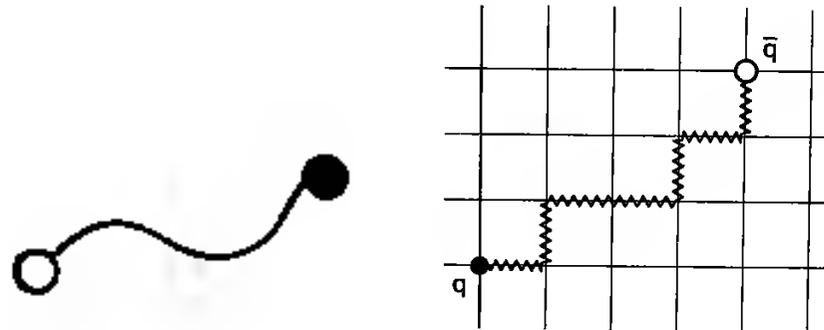
Esta é a expressão da lei de Stefan-Boltzmann para férmions. O fator $7/8$ reflete simplesmente o fato de que a distribuição estatística n_B de Bose-Einstein (BE) é maior, em $\mu = 0$, do que a distribuição n_F de Fermi-Dirac (FE), para uma energia $E(k)$ fixa:

$$n_B(k) = \frac{1}{e^{(E(k)-\mu)/T} - 1}, \quad n_F(k) = \frac{1}{e^{(E(k)-\mu)/T} + 1}.$$

3.3. CORDA HADRÔNICA E DESCONFINAMENTO

A transição de desconfinamento a uma temperatura T finita pode ser entendida a partir das propriedades de uma **corda hadrônica**. Vamos inicialmente recordar o **argumento da energia-entropia**, relativamente às transições de fase com temperatura T finita. Consideremos a energia livre de Helmholtz $F = E - TS$. A baixas temperaturas, F é dominada pela energia interna E , ou seja, o sistema dá preferência a um estado ordenado com E pequena. Por outro lado, a temperaturas elevadas, F é dominada pelo fator de entropia $-TS$, o que pode ser interpretado como uma preferência do sistema por um estado desordenado com muita entropia. Tudo isto implica naturalmente a existência de uma transição de fase do estado ordenado para o estado desordenado, a uma dada temperatura T .

Aplicando esse argumento à representação de um méson ($\bar{q}q$) como um quark e um antiquark em rotação relativística, ligados por uma corda com tensão constante, conforme a primeira figura abaixo, pode ser demonstrada a possibilidade de existência de uma transição de fase para o desconfinamento.



Para simplificar, consideremos uma corda aberta, com tensão K ; e, para que os cálculos sejam tratáveis, seguimos Kenneth Wilson e vamos discretizar o espaço D -dimensional em uma rede de células quadradas com parâmetro uniforme de espaçamento a , como o reticulado acima. A estatística de uma corda definida nessa rede será descrita pela função de partição:

$$Z = \sum_L \sum_{\text{config}} \exp\left(-\frac{LKa}{T}\right)$$

Nesta expressão, foi assumido que uma extremidade da corda está fixada em um sítio determinado da rede, e a soma simbolizada por “config” se dá sobre todas as possíveis formas da corda com comprimento La . Como a corda assim definida sobre a rede pode ser considerada como um percurso aleatório (*random walk*) sem retrocesso, o número de cordas com comprimento L será igual a $(2D - 1)^L$. Logo:

$$Z = \sum_L \exp \left[-\frac{1}{T} (LKa - LT \ln(2D - 1)) \right].$$

Pode ser também mostrado que a energia livre da corda aberta será igual a:

$$F = E - TS = LKa - TL \ln(2D - 1).$$

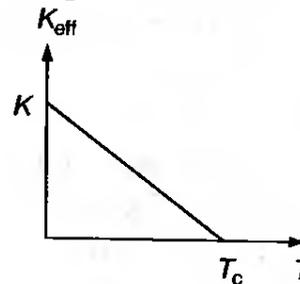
À medida que T cresce, o fator de entropia advindo da flutuação da corda começa também a crescer, e a função de partição Z se torna singular no ponto crítico dado por:

$$T_c = \frac{Ka}{\ln(2D - 1)}.$$

Esta singularidade é um forte indício de uma transição de fase. Podemos definir uma tensão efetiva para a corda como sendo:

$$K_{\text{eff}} = K - \frac{T}{a} \ln(2D - 1)$$

Esta tensão efetiva é ilustrada abaixo, em função da temperatura absoluta:



Como K_{eff} decresce à medida que T se aproxima de T_c , o quark q e o antiquark \bar{q} fixos nos extremos da corda aberta perdem sua correlação no ponto crítico, o que sugere uma transição para o QGP em T_c . Fazendo $D = 3$, $K = 0,9 \text{ GeV fm}^{-1}$ (que é o valor encontrado para o modelo de potencial não perturbativo da QCD), e escolhendo o espaçamento $a = 0,5 \text{ fm}$, obtemos um valor estimado para o ponto crítico de $T_c \approx 280 \text{ MeV}$. Se considerarmos adicionalmente a ruptura da corda devido às excitações térmicas dos pares $q\bar{q}$, este efeito reduzirá o valor de T_c , aproximando-se mais do valor mais provável de 200 MeV .

Antes de prosseguir, é interessante uma breve explicação sobre a estrutura de vácuo da QCD e sobre alguns modelos fenomenológicos simplificados.

3.4. A ESTRUTURA DO VÁCUO DA QCD

Como a constante de acoplamento g da QCD aumenta com a distância, a interação entre quarks e glúons não pode ser tratada perturbativamente em baixas energias. Logo, a estrutura do vácuo da QCD é não perturbativa, e admite configurações não triviais, como, por exemplo, o condensado supercondutor de quarks e antiquarks $\langle \bar{q}q \rangle = -(250 \text{ MeV})^3$, ou o condensado de glúons $\langle gG_{\mu\nu}gG^{\mu\nu} \rangle = \langle g^2G^2 \rangle = (850 \text{ MeV})^4$. Por definição, os “condensados” da QCD correspondem a uma escala particular de normalização μ , uma vez que incluem todos os modos harmônicos dos campos com momentos virtuais $p_v^2 < \mu^2$. Os dois VEV acima se referem à escala $\mu = 1 \text{ GeV}$, e o condensado de glúons envolve a carga colorida g e o tensor de intensidade de campo gluônico $G_{\mu\nu}$.

O méson de vida média muito curta composto de um quark e um antiquark com o sabor c , ou *charm*, é chamado de **charmônio**. O charmônio já foi observado indiretamente, e o seu espectro de massa teórico indica que os glúons possuem uma condensação não perturbativa, na escala de energia estimada em $(300 \text{ MeV})^4 = 3 \times 10^{-4} \text{ GeV}$. Usando esse resultado para

calcular o VEV do tensor de energia-momentum $\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} = -\epsilon_{\text{vac}} g^{\mu\nu}$, onde ϵ_{vac} é a densidade de energia do vácuo, podemos fazer a seguinte estimativa dessa densidade de energia:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{vac}} &\simeq -\frac{11 - 2N_f/3}{32} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \right\rangle_{\text{vac}} \\ &\simeq -0.3 \text{ GeV fm}^{-3}. \end{aligned}$$

Isto significa que o vácuo da QCD possui uma densidade de energia inferior à do vácuo perturbativo. É usual se introduzir a notação $\epsilon_{\text{vac}} = -B$, em que B é a **constante de sacola**, referente ao **modelo nuclear de sacola do MIT** (*MIT bag model*), que será mostrado mais à frente. E também significa que o confinamento da carga colorida está relacionado à estrutura da distribuição de glúons no vácuo não perturbativo. O condensado de glúons é um parâmetro de ordem para a quebra espontânea de simetria quiral na QCD, e, de forma geral, determina a normalização dos campos não perturbativos no vácuo, fazendo com que todo modelo seja apropriadamente normalizado em referência ao seu valor.

Como esta questão da escolha de um determinado modelo não possui até hoje uma resposta satisfatória, temos que nos satisfazer com analogias com configurações físicas que conhecemos bem. Verificamos então que o vácuo da QCD pode muito bem ser um antidielétrico perfeito, que permite a supercondutividade colorida; ou, equivalentemente, uma substância paramagnética perfeita. Traduzindo em conceitos e símbolos usuais:

$$\epsilon_{\text{vac}} = 0, \quad \mu_{\text{vac}} = \infty.$$

E quanto à estrutura do vácuo da QCD em termos dos quarks? As relações de Gell-Mann-Oakes-Renner (GOR) que são obtidas apenas por simetria quiral, nos dizem que:

$$\begin{aligned} f_\pi^2 m_{\pi^\pm}^2 &= -\hat{m} \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle_{\text{vac}} + O(\hat{m}^2), \\ f_\pi^2 m_{\pi^0}^2 &= -\langle m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d \rangle_{\text{vac}} + O(\hat{m}^2). \end{aligned}$$

Nestas relações, $\hat{m} = (m_u + m_d)/2$ é a média das massas dos dois quarks u e d , $f_\pi (= 93 \text{ MeV})$ é a constante de decaimento do pión, $m_{\pi^\pm} \simeq 140 \text{ MeV}$ é a massa do pión carregado e $m_{\pi^0} \simeq 135 \text{ MeV}$ é a massa do pión neutro.

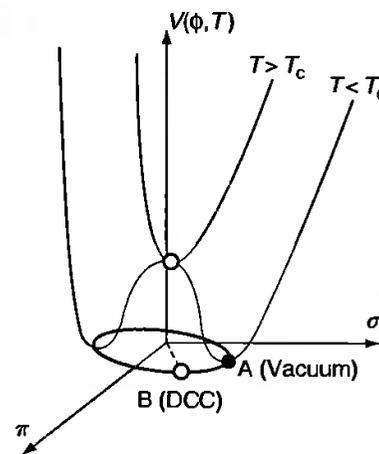
Usando as relações GOR e a tabela experimental de massas dos quarks ($\hat{m}(\kappa=1\text{GeV}) \approx 5,6\text{MeV}$), podemos estimar o seguinte VEV:

$$\langle (\bar{u}u + \bar{d}d)/2 \rangle_{\text{vac}} \sim -(250\text{MeV})^3$$

Este valor foi estimado para $\mu=1\text{GeV}$, onde μ é um parâmetro arbitrário, chamado de **ponto de renormalização**, que representa a escala de energia em que as divergências são renormalizáveis. Esse resultado implica que o vácuo da QCD envolve a condensação de pares quarks - antiquarks, conforme Nambu e Jona-Lasinio sugeriram em 1961. Nambu também verificou que o VEV $\langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L \rangle \neq 0$ não era invariante sob uma transformação (N_f é o número de sabores) quiral

$$\text{SU}_L(N_f) \times \text{SU}_R(N_f)$$

A densidade de energia do vácuo da QCD pode ser representada em termos do parâmetro de ordem de uma forma similar à mostrada abaixo:



Esta função recebeu vários nomes, desde o original **potencial de Ginzburg-Landau**, até o bem-humorado **chapéu mexicano**, ou **sombbrero**, estes últimos devidos à sua forma tridimensional. E se tornou na apresentação mais comum do

mecanismo de **quebra espontânea de simetria**, descoberto por Nambu. A flutuação da fase de $\langle \bar{q}q \rangle$, no limite quiral, não tem custo energético, e corresponde aos píons de massa nula. Este último resultado pode ser expresso de forma rigorosa, e resulta no **teorema de Nambu-Goldstone**.

De uma forma geral, qualquer tentativa de modelagem dos campos de vácuo da QCD tem que escolher uma das duas opções: (i) esses campos são uma espécie de “ruído quântico”, e devem ser tratados de forma estatística; (ii) são campos formados efetivamente por objetos específicos.

A primeira abordagem é conhecida como **modelo estocástico de vácuo**, e foi proposto e desenvolvido entre 1988 e 2000 (Dosch e Simonov, Phys. Lett, B205, 399; Dosch, Schevchenko e Simonov, arXiv:hep-ph/0007223). Este modelo foi utilizado em cálculos na rede, e teve razoável sucesso quando comparado a resultados experimentais de espalhamento a altas energias. No entanto, só se aplica a processos de troca de momentum-energia, e não de produção de partículas, porque o modelo só possui “propagadores não perturbativos” sem vértices. A ideia principal do modelo é tratar a distribuição da intensidade do campo de vácuo como gaussiana, mas em termos de G , e não de A_μ :

$$\int_{p_v^2 < \mu^2} DA e^{-S[A]} \rightarrow \int DG \exp(-G_{\mu\nu} K_{\mu\nu\kappa\lambda} G_{\kappa\lambda}).$$

Nesta definição, $K_{\mu\nu\kappa\lambda}^{-1}$ é o “propagador não perturbativo”, o principal ingrediente do modelo.

A segunda opção resulta em um modelo altamente não homogêneo: o **vácuo de instânton**.

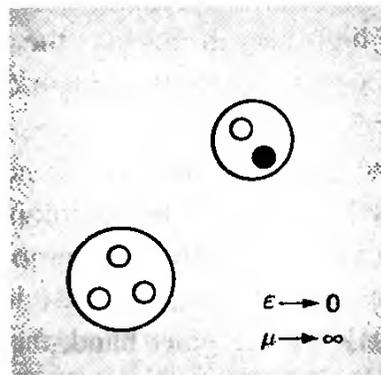
Como os campos de vácuo do modelo estocástico são ruído quântico, não obedecem a equações de movimento, e, portanto, não admitem “correções quânticas”. Porém, se admitirmos que o vácuo da QCD contém objetos semiclássicos com campos de gauge intensos, e que sejam soluções clássicas das equações não lineares de Yang-Mills. Neste caso o pequeno valor das correções quânticas garante a consistência do tratamento perturbativo, e a “calibragem” do modelo por cálculos em laços sucessivos. Por sua importância e seu elaborado conteúdo matemático, este modelo de vácuo será visto à frente em mais detalhe.

3.5. ALGUMAS ABORDAGENS DA QCD NÃO PERTURBATIVA

Existem vários modelos de QCD propostos, como o **modelo de sacola**, o **modelo de potencial** e o **modelo de Nambu-Jona-Lasinio (NJL)**. Embora devamos ser cautelosos para não extrapolar os limites próprios a cada um desses modelos, eles são bastante úteis para a elucidação de algumas das características essenciais da QCD em um regime não perturbativo – até mesmo porque foram propostos com esse fim. Outros métodos mais usados no regime perturbativo são as **regras de soma da QCD** e a **teoria quiral perturbativa**. No campo das simulações numéricas da QCD, o **método de cálculos em rede** vem se mostrando uma ferramenta extremamente importante, sobretudo com o progressivo aumento de capacidade de processamento dos supercomputadores. Veremos brevemente algumas dessas abordagens.

O MODELO DE SACOLA (EM INGLÊS, *M.I.T. BAG MODEL*)

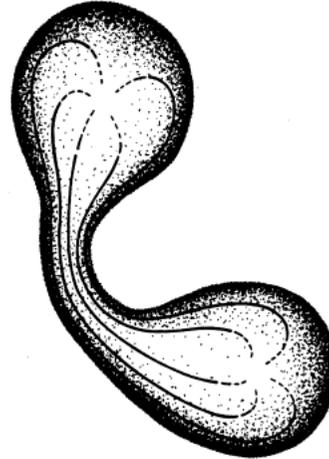
Este modelo fenomenológico foi proposto em 1974 por um grupo de físicos do M.I.T composto por Chodos, Jaffe, Johnson, Thorn e Weisskopf (Phys. Rev., D9, 3471). Os hádrons são considerados como “sacolas” mergulhadas em um vácuo cromodinâmico não perturbativo, e é introduzida uma condição de contorno apropriada para os quarks e glúons, incorporando naturalmente o confinamento, de forma a impedir que a carga colorida escape da região circunscrita pela sacola, nesta região, não são considerados condensados, e quarks e glúons são tratados perturbativamente. O vácuo não perturbativo possui a propriedade de ser perfeitamente paramagnético, como ilustra a figura abaixo:



Ninguém melhor para descrever os fundamentos do modelo que seus autores:

We propose that a strongly interacting particle is a finite region of space to which fields are confined. The confinement is accomplished in a Lorentz-invariant way by endowing the finite region with a constant energy per unit volume, B . We call this finite region a "bag." The contained fields may be either fermions or bosons and may have any spin; they may or may not be coupled to one another. Equations of motion and boundary conditions are obtained from a variational principle. The confining region has no dynamical freedom but constrains the fields inside: There are no excitations of the coordinates determining the confining region. The model possesses many desirable features of hadron dynamics: (i) a parton interpretation and presumably Bjorken scaling; the confined fields are free or weakly interacting except close to the boundary; (ii) infinitely rising Regge trajectories as a consequence of the bag's finite extent; (iii) the Hagedorn degeneracy or limiting temperature; (iv) all physical hadrons are singlets under hadronic gauge symmetries. For example, in a theory of fractionally charged, "colored" quarks interacting with colored, massless gauge vector gluons, if both quark and gluon fields are confined to the bag, only color-singlet solutions exist. In addition to establishing these general properties, we present complete classical and quantum solutions for free scalars and also for free fermions inside a bag of one space and one time dimension. Both systems have linear mass-squared spectra. We demonstrate Poincaré invariance at the classical level in any dimension and at the quantum level for the above-mentioned explicit solutions in two dimensions. We discuss the behavior of specific solutions in one and three space dimensions. We also discuss in detail the problem of fermion boundary conditions, which follow only indirectly from the variational principle.

A figura original do artigo ilustra uma “interação de fissão” de um hádron singlete de cor $C=0$ em duas sacolas não singletos, $C' \neq 0$ e $-C$:



As linhas internas representam os fluxos dos campos de glúons que impedem a separação dos pártons que compõem o hádron. Nesse modelo, a massa do próton é dada pela expressão:

$$M_p = \frac{3x}{R_{bag}} + \frac{4\pi}{3}BR_{bag}^3 + \dots,$$

onde R_{bag} é o raio de uma sacola esférica, e x/R_{bag} é a energia cinética de cada quark confinado na sacola – por exemplo, $x \sim 2,04$ para o modo mais baixo de energia de um quark com massa nula. A constante de sacola B representa a energia por unidade de volume, com dimensão x^{-4} , logo, o termo proporcional a B é a energia necessária para criar uma região perturbativa no vácuo não perturbativo. Logo, $-B$ pode ser identificada à equação:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{vac} &\simeq -\frac{11 - 2N_f/3}{32} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \right\rangle_{vac} \\ &\simeq -0.3 \text{ GeV fm}^{-3}. \end{aligned}$$

As reticências na expressão da massa do próton representam outros fatores, como as interações entre os quarks no interior da sacola, a energia de Casimir de quarks e glúons na cavidade esférica, o efeito da nuvem de mésons ($\bar{q}q$) em torno da sacola, e outros. Usando a identificação $B = -\epsilon_{vac}$, obtemos um valor estimado para B igual a:

$$B \sim (220 \text{ MeV})^4.$$

Os espectros de massas dos hádrons compostos pelos quarks mais leves u, d, s são descritos razoavelmente bem por esse modelo, que usaremos mais adiante para construir um modelo esquemático para a transição de fase entre a matéria hadrônica e o QGP.

O MODELO DE POTENCIAL

Para descrever hádrons compostos por quarks mais massivos, tais como c e b , um bom ponto de partida é a equação de Schrödinger não relativística com um potencial estático entre os quarks. Essa representação por potencial se justifica quando o movimento dos quarks de valência é muito mais lento do que a frequência típica dos glúons virtuais trocados entre os quarks. Uma forma típica do potencial $q\bar{q}$ fenomenológico é a de um potencial coulombiano adicionado a um potencial linear:

$$V_{q\bar{q}}(R) = -\frac{a}{R} + KR + \dots,$$

onde R é a distância entre o quark e o antiquark, e K é a tensão da corda que representa a intensidade da força de confinamento. Obtém-se o valor aproximado dessa constante empírica experimentalmente, de forma a ser compatível com os espectros de massa do charmônio $c\bar{c}$ e do botômio $b\bar{b}$:

$$K \simeq (0.42 \text{ GeV})^2 = 0.9 \text{ GeV fm}^{-1}.$$

Na teoria perturbativa, o coeficiente do termo coulombiano vem a ser proporcional à constante de acoplamento da interação forte α_s :

$$a = 4\alpha_s/3.$$

As reticências representam fatores relativísticos de correção como os termos hiperfino, de spin-órbita, etc.

Pelos pressupostos deste modelo, não há nenhuma razão apriorística para crer que a representação de potencial seja adequada também para o caso de hádrons compostos por quarks leves u, d, s . Entretanto, obtém-se um notável sucesso fenomenológico na descrição dos espectros de massa e das propriedades eletromagnéticas desses hádrons, se assumimos que esses quarks possuem as seguintes **massas constituintes**:

$$M_{u,d} \sim 340 \text{ MeV and } M_s \sim 540 \text{ MeV.}$$

Estas valores para as massas, porém, são muito maiores que os valores tabelados, e acredita-se hoje que sejam as massas efetivas geradas pelo mecanismo de quebra dinâmica da simetria quiral, que veremos mais adiante.

O MODELO NJL

Este modelo se fundamenta em uma lagrangiana que encerra aspectos essenciais da simetria quiral em QCD. A forma típica da densidade lagrangiana para N_f sabores de quarks foi proposta teoricamente por Nambu e Jona-Lasinio em 1961 (Phys. Rev. 122, 345 e Phys. Rev. 124, 246) como sendo dada por:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{q}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)q + \frac{g_{\text{NJL}}}{2} \sum_{j=0}^{N_f^2-1} [(\bar{q}\lambda^j q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \lambda^j q)^2].$$

Esta equação inclui o termo cinético de quark e uma interação fermiônica quártica com simetria quiral com uma constante de acoplamento dimensional g_{NJL} . A quebra dinâmica da simetria, definida por $\langle \bar{q}q \rangle_{\text{vac}} \neq 0$, ocorre quando g_{NJL} excede um certo valor crítico, e as massas constituintes dos quarks são então geradas dinamicamente:

$$M_q = m_q - 2g_{\text{NJL}} \langle \bar{q}q \rangle_{\text{vac}}.$$

Este modelo pode ser aplicado diretamente ao estudo da restauração da simetria quiral quebrada, em altas temperaturas e/ou em altas densidades bariônicas, e, apesar de sua simplicidade, captura o comportamento essencial do diagrama de fase da QCD no mundo real.

3.6. A TEORIA QUIRAL PERTURBATIVA

A teoria quiral perturbativa se origina da observação de que os graus de liberdade pseudoescalares com pequena massa – os píons – que existem no espectro do setor confinado da QCD podem ser explicados em termos de uma simetria quebrada espontaneamente. Vejamos como isso pode ser verdade, de uma forma simplificada, considerando a lagrangiana da QCD para um campo genérico ψ correspondente a quarks de massa nula:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{D}\psi$$

Com base em uma comparação com a escala de energia da QCD, a aproximação de massa nula só é aceitável para quarks u e d , é ruim para quarks s , e simplesmente inviável para quarks c, b, t . A equação de Dirac para a partícula livre, quando estes são férmions, se escreve:

$$\not{k}\psi = 0$$

Usando o fato de que o anticomutador $\{\gamma_\mu, \gamma_5\}$ é igual a zero, uma solução também pode ser $\gamma_5 \psi$. Em consequência, temos duas soluções:

$$\psi_{L/R} = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5) \psi,$$

o que define γ_5 como um operador de quiralidade:

$$\gamma_5 \psi_{L/R} = \mp \psi_{L/R}.$$

Os subscritos se referem obviamente às soluções de quiralidade à esquerda, L , e à direita, R . Podemos ainda reescrever a equação de Dirac acima, neste caso particular, como:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}}\psi = \pm \gamma_5 \psi$$

Nesta expressão,

$$\gamma_5 \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\sigma}.$$

Em resultado disso, para as soluções de quiralidade à direita, a helicidade e o sinal da energia, este identificado pelos símbolos \pm , são correlacionados, como o são também para as soluções de quiralidade à esquerda.

Em vista disso, podemos reescrever a equação de Dirac como:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L \not{D}\psi_L + i\bar{\psi}_R \not{D}\psi_R$$

Este resultado significa que os setores L e R se desacoplam. Em consequência, transformações de simetria do tipo:

$$\psi_{L/R} \rightarrow \exp\left(-i \sum_j \alpha_{L/R}^j \lambda^j\right) \psi_{L/R}$$

preservam a invariância da lagrangiana.

No caso do grupo de simetria $SU(2)$, as matrizes λ^j são as matrizes de Pauli, e $\psi_{L/R}$ as projeções quirais do dublê $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ de massa pequena. De maneira similar, para o grupo $SU(3)$ as matrizes λ^j são as matrizes de Gell-Mann, e as projeções quirais envolvidas são aquelas obtidas a partir dos campos u, d, s . Os elementos $\alpha_{L/R}^j$ são as componentes de vetores constantes arbitrários. Usando como exemplo o caso do grupo $SU(2)$, a invariância da lagrangiana quanto às transformações de simetria acima é alternativamente chamada como $SU(2)_L \times SU(2)_R$, $SU(2)$ quiral, ou $SU(2)_{Vetorial} \times SU(2)_{Axial}$. Logo, se a simetria quiral estivesse na pauta diária da natureza, teríamos três cargas de Noether vetoriais independentes do tempo, assim como três cargas de Noether axiais independentes do tempo. Como essas cargas são proporcionais aos operadores número, os quais informam a quantidade de partículas envolvidas em um processo, esta multiplicidade de representações leva forçosamente à predição de dubletos de partículas, que não são observados. A resposta a este “enigma” é que existe uma quebra de simetria da lagrangiana no estado fundamental da teoria, a qual faz com que sejam produzidos os bósons de Nambu-Goldstone. Antes de prosseguirmos, é fundamental entendermos, mesmo que de forma mínima, o teorema de Goldstone.

TEOREMA DE GOLDSTONE

O teorema pode ser enunciado assim:

Se uma simetria contínua da lagrangiana é quebrada espontaneamente, e se não existem forças de longo alcance atuando, existirá forçosamente uma excitação do vácuo com frequência e momentum nulos.

Este teorema prediz em quatro dimensões que é possível que um campo escalar possua um VEV que não poderia possuir no caso do vácuo ser invariante sob algum grupo de transformações, mesmo se esse grupo fosse um grupo de simetria no qual as correntes de Noether associadas fossem conservadas. Este resultado prevê também a produção de **um bóson escalar com massa nula**, também chamado **bóson de Goldstone**. Rigorosamente falando, este teorema não é geral. Por exemplo, Sidney Coleman publicou um artigo intitulado “Não existem bósons de Goldstone em 1+1 dimensões” (*Comm. Math. Phys.* 31 (1973) 259-264). Para dimensões maiores, o teorema é válido também para teorias não perturbativas. No caso de quebra espontânea de uma simetria discreta, porém, o teorema não se aplica, e, mesmo em quatro dimensões, não se pode associar a essa quebra o surgimento de um bóson de Goldstone. Eis alguns exemplos de sistemas não relativísticos de muitas partículas:

- Ferromagnetos – A ausência de forças de longo alcance, que tenderiam a acoplar spins a grandes distâncias, resulta necessária para a existência de um modo de oscilação com $\omega \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow 0$.
- Supercondutores – A teoria BCS diz que há uma quebra espontânea de invariância de fase, que conserva o número de elétrons. Entretanto, subsiste neste caso uma diferença de energia (*mass gap*) que é igual à massa dos pares de Cooper, e, em virtude disso, e do fato de que não subsistem forças de longo alcance, como a eletromagnética, não são criados bósons de Goldstone.
- Superfluidos – Um condensado Bose-Einstein (BEC) é um superfluido. O campo condensado, quando $T=0$, é $\langle \Phi \rangle = \xi$, que está relacionado à densidade de número de partículas por $\eta = |\xi|^2$. O espectro dos fônons é:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{2m} \left(\frac{k^2}{2m} + 2nV(k) \right)$$

Na expressão anterior, $V(k)$ é a transformada de Fourier do potencial de duas partículas. Por definição, um potencial de curto alcance exige que $V(k=0)$ seja uma grandeza finita e positiva definida. Neste caso, $\omega \rightarrow \sqrt{nV(k=0)/mk}$ quando $k \rightarrow 0$. O mesmo não acontece para um potencial coulombiano, porque $V(k) = e^2/k^2$, e, quando $k \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow e\sqrt{n/m}$, a frequência do plasma eletromagnético.

A QUEBRA DA SIMETRIA QUIRAL EM QCD

No caso que estamos estudando, a quebra de simetria é dinâmica, o que significa que a corrente de Noether associada com o setor axial possui um divergente não nulo que recebe contribuições das correções quânticas. Esta descoberta se deve a Adler, Bell e Jackiw, e é justamente conhecida como a anomalia ABJ. Um fato extra é que existem três partículas leves, os píons π^0, π^+, π^- , que não têm massa nula. Essa peculiaridade deve ser atribuída ao fato da pressuposição – errada - de que os quarks não possuem massa nua, ou seja, sem perturbações do vácuo. Se os quarks u e d tivessem realmente massa nua zero, o pión (π^0, π^+, π^-) poderia ser um bóson de Goldstone genuíno, com $m_\pi = 0$. Fazendo os cálculos perturbativos da quebra explícita de simetria, em primeira ordem, a massa finita do pión pode ser atribuída ao condensado de quarks u e d .

O objetivo da teoria quiral perturbativa é produzir uma teoria efetiva com as mesmas simetrias da teoria completa, a QCD, e ser aplicável a baixas energias, onde a teoria exata é fortemente acoplada. Por isso, a teoria QCD efetiva é formulada em termos dos campos hadrônicos com menor massa, os píons. Mantendo em vista que a simetria quiral não é manifesta no estado fundamental da QCD, há um procedimento para implementar uma simetria espontaneamente quebrada em uma TQC, estabelecida em 1969 por Coleman, Wess e Zumino (Phys. Rev. 177, 2239). No caso particular da simetria quiral, um método conveniente de se coletarem os campos de Goldstone é a parametrização exponencial, o que resulta, em

se tratando de $SU(3)$, em fazermos $U(\phi) = \exp\left(i \sum_1^8 \lambda_a \phi^a / F\right)$, onde λ_a é uma matriz de Gell-Mann e F é uma constante.

Explicitando essa parametrização:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi^a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 \end{pmatrix}$$

Rigorosamente falando, a lagrangiana do Modelo Padrão não é invariante quiral. A simetria quiral das interações nucleares fortes é quebrada pela interação eletrofraca, devido ao acoplamento do campo escalar de Yukawa com os campos fermiônicos de quarks, o qual é responsável pela geração de massas não nulas para estes. O pressuposto básico da teoria quiral de perturbação é que o limite quiral correspondente a essa quebra é um ponto de partida viável para uma expansão perturbativa. Essa expansão se dará duplamente, em potências tanto dos momentos quanto das massas dos quarks. No limite quiral de baixa energia os bósons de Goldstone se desacoplam, dando origem aos quarks u e d .

Formalmente, isso é mostrado pela introdução na lagrangiana invariante quiral da QCD de acoplamentos entre os quarks u , d , s e quatro campos hermitianos externos $s(x)$, $p(x)$, $v_\mu(x)$ e $a_\mu(x)$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{QCD}} + \bar{\psi}\gamma^\mu(v_\mu + a_\mu\gamma_5)\psi - \bar{\psi}(s - ip\gamma_5)\psi$$

Esses campos externos transformam-se sob paridade, respectivamente, como escalar, pseudoescalar, vetor polar e vetor axial. Os campos vetoriais quirais à direita r_μ e à esquerda l_μ são definidos da forma usual:

$$r_\mu = v_\mu + a_\mu, \quad l_\mu = v_\mu - a_\mu.$$

A lagrangiana usual é recuperada no limite:

$$\begin{aligned} p &= v_\mu = a_\mu = 0 \\ s &= \text{diag}(m_u, m_d, m_s). \end{aligned}$$

Este é o limite da QCD de baixas energias, e as funções de Green correspondentes são obtidas por esse procedimento.

4. A TRANSIÇÃO DE FASE QUARK-HÁDRON

Para estudarmos quantitativamente a transição de fase quark-hádron sugerida pelos vários modelos fenomenológicos, precisamos de uma equação de estado (EOS) que descreva o comportamento dos condensados nas vizinhanças do ponto crítico. O modelo de sacola permite uma abordagem em que a aproximação do ponto crítico é feita tanto a partir de baixa temperatura quanto de alta temperatura T , obtendo-se, a partir daí, a correspondente EOS, como veremos a seguir.

4.1. EQUAÇÃO DE ESTADO DO BAG MODEL DO M.I.T.

Usaremos, para simplificar, o limite quirral $m_q = 0$. Neste caso, a excitação dominante na fase hadrônica é o pión de massa nula, enquanto que na fase do QGP são o quark de massa nula e o glúon. Em temperaturas extremamente baixas $T \ll \Lambda_{QCD}$ os momenta típicos dos píons são pequenos, e as interações entre píons são suprimidas pelas potências de $T/4\pi f_\pi$, onde $f_\pi \sim N_f^2 - 1$. Para uma temperatura T extremamente alta, os momenta típicos de quarks e glúons são grandes, e a constante corrente de acoplamento $\alpha_s(\kappa \sim T)$ se torna pequena, devido à liberdade assintótica. Logo, em primeira aproximação, podemos supor a existência de um gás de píons livres em baixa temperatura e um gás de quarks e glúons livres em alta temperatura. A partir do grande potencial

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_B(T, V, 0)}{V} &= d \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \ln(1 - e^{-E(k)/T}) \\ &= -d \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \frac{1}{e^{E(k)/T} - 1} \\ &\xrightarrow{m=0} -d \frac{\pi^2}{90} T^4, \end{aligned}$$

podemos encontrar facilmente as grandezas termodinâmicas equivalentes à densidade de energia e densidade de entropia para o gás de píons de massa nula:

$$P_H = d_\pi \frac{\pi^2}{90} T^4,$$

$$\varepsilon_H = 3d_\pi \frac{\pi^2}{90} T^4,$$

$$s_H = 4d_\pi \frac{\pi^2}{90} T^3.$$

Nesta expressão, $d_\pi = N_f^2 - 1$ é o número de bósons de Goldstone com massa nula e N_f sabores. Uma vez que essas equações determinam as propriedades termodinâmicas do sistema, são chamadas de **equações de estado** (EOS) do modelo de sacola.

Na fase de QGP, teremos:

$$P_{\text{QGP}} = d_{\text{QGP}} \frac{\pi^2}{90} T^4 - B,$$

$$\varepsilon_{\text{QGP}} = 3d_{\text{QGP}} \frac{\pi^2}{90} T^4 + B,$$

$$s_{\text{QGP}} = 4d_{\text{QGP}} \frac{\pi^2}{90} T^3.$$

Nestas relações, d_{QGP} é um fator efetivo de degeneração dos quarks e glúons nesta fase, aparecendo mais uma vez um fator 7/8 devido às estatísticas diferentes entre bósons e férmions, e a constante B característica do modelo de sacola:

$$d_{\text{QGP}} = d_g + \frac{7}{8}d_q, \quad d_g = 2_{\text{spin}} \times (N_c^2 - 1), \quad d_q = 2_{\text{spin}} \times 2_{q\bar{q}} \times N_c \times N_f.$$

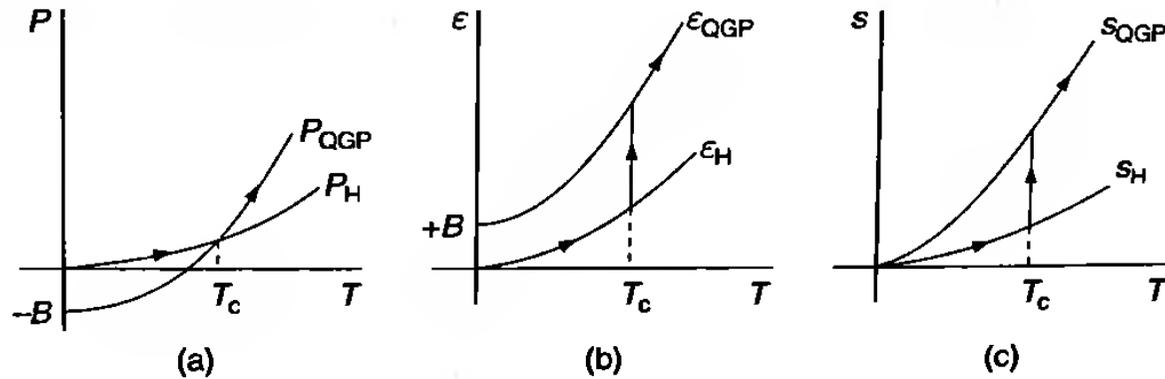
A constante B parametriza a diferença entre as densidades de energia do vácuo e do vácuo perturbativo:

$$B = \varepsilon_{pert} - \varepsilon_{vac} > 0.$$

Devido à invariância de Lorentz do vácuo a densidade e temperatura zero, B também representa a diferença de pressão entre os dois vácuos:

$$B = P_{vac} - P_{pert} > 0.$$

Introduzindo B no grande potencial da fase QGP, podemos normalizá-lo para $T=0$, e já é possível descrever quantitativamente a transição de fase no modelo de sacola. As figuras abaixo representam as equações de estado para o modelo de sacola a temperatura finita e potencial químico zero: (a) pressão; (b) densidade de energia; (c) densidade de entropia:



As setas indicam a evolução do sistema através de incrementos adiabáticos de T . No gráfico (a), a pressão hadrônica é maior que a pressão do QGP, e é favorecida a baixa temperatura T porque $B > 0$. Por outro lado, a pressão do QGP é favorecida a alta temperatura T devido ao seu alto fator de degeneração: $d_{QGP} \gg d_{\pi}$. O ponto crítico é calculado através da condição de equilíbrio de fase para $\mu = 0$:

$$P_H(T_c) = P_{QGP}(T_c),$$

relação que leva imediatamente ao resultado:

$$T_c^4 = \frac{90}{\pi^2} \frac{B}{d_{\text{QGP}} - d_\pi}.$$

Usando o valor típico $B^{1/4} \sim 220 \text{ MeV}$ e o número de graus de liberdade de cor $N_c = 3$, obtemos $T_c(N_f = 2) \sim 160 \text{ MeV}$.

Os gráficos (b) e (c) mostram saltos súbitos das densidades de energia e entropia em $T = T_c$. Este é um comportamento típico das **transições de fase de primeira ordem**, quando a derivada do grande potencial com respeito a um de seus argumentos apresenta uma descontinuidade sobre a fronteira entre as fases - esta definição original devida a Ehrenfest possui uma versão moderna, na qual o que caracteriza uma transição de primeira ordem é a existência de um **calor latente** L . De fato, a densidade de entropia, definida por $s = \partial P / \partial T$, é descontínua no gráfico (a) na temperatura $T = T_c$.

O calor latente L liberado em $T = T_c$ é dado por:

$$\begin{aligned} L &\equiv T_c \left(s_{\text{QGP}}(T_c) - s_{\text{H}}(T_c) \right) \\ &= \varepsilon_{\text{QGP}}(T_c) - \varepsilon_{\text{H}}(T_c) = 4B. \end{aligned}$$

Uma vez que $L \gg \varepsilon_{\text{H}}(T_c)$, a densidade de energia crítica necessária para a criação do QGP pode ser estimada como:

$$\varepsilon_{\text{crit}} \equiv \varepsilon_{\text{QGP}}(T_c) \sim 4B \sim 1.2 \text{ GeV fm}^{-3}.$$

Este valor é uma ordem de grandeza superior ao da energia nuclear ordinária:

$$\varepsilon_{\text{nm}} \simeq 0.15 \text{ GeV fm}^{-3}$$

Embora o modelo de sacola aparente captar a essência da transição de fase, os efeitos das interações entre as partículas são totalmente ignorados. Pode-se complementar essa ausência pela inclusão dessas interações, ao menos em temperaturas T extremamente baixas, na teoria quiral perturbativa; e, em extremamente altas temperaturas, usando a QCD perturbativa com liberdade assintótica. Mesmo assim, nas proximidades do ponto crítico, a física pode ser fortemente alterada por interações não perturbativas.

4.3. TEMPERATURA DE HAGEDORN: LIMITE TEÓRICO

Na medida em que T é substancialmente menor do que a energia de decaimento do pión, $f_\pi = 93MeV$, a teoria quiral perturbativa permite um procedimento sistemático de aperfeiçoamento da EOS do modelo de sacola. Isso é possível porque o momentum típico do pión de massa nula, igual a $k \sim 3T$, resulta em um pequeno parâmetro adimensional, $k/4\pi f_\pi \sim T/4f_\pi$, no limite quiral. Os resultados parciais dos primeiros termos da série perturbativa para $N_f = 2$ no limite quiral são os seguintes (P. Gerber e Heinrich Leutwyler, *Nucl. Phys.B321(1989) 387*):

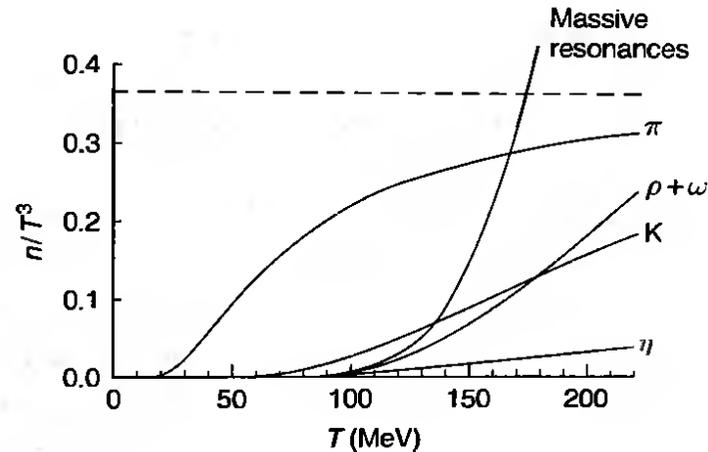
$$P_H/P_{SB} = 1 + \frac{T^4}{36f_\pi^4} \ln \frac{\Lambda_p}{T} + O(T^6),$$

$$\varepsilon_H/\varepsilon_{SB} = 1 + \frac{T^4}{108f_\pi^4} \left(7 \ln \frac{\Lambda_p}{T} - 1 \right) + O(T^6),$$

$$s_H/s_{SB} = 1 + \frac{T^4}{144f_\pi^4} \left(8 \ln \frac{\Lambda_p}{T} - 1 \right) + O(T^6),$$

onde P_{SB} , ε_{SB} e s_{SB} são as EOS de Stefan-Boltzmann de primeira ordem mostradas anteriormente e $\Lambda_p (= 275 \pm 65MeV)$ é uma quantidade relacionada ao espalhamento pión-pión.

Quando a temperatura ultrapassa 100MeV , começam a ser importantes as contribuições provindas de hádrons massivos diferentes dos píons. Uma estimativa grosseira dessas contribuições pode ser feita pela expressão $n(T)/T^3$, onde $n(T)$ é a densidade de hádrons, conforme ilustra a figura abaixo, onde as interações entre os hádrons são ignoradas:



As “ressonâncias massivas” indicam contribuições de hádrons diferentes de π, K, η, ρ e ω . Embora o píon seja a única excitação relevante para $T < 100\text{MeV}$, outras contribuições passam a ser relevantes a partir de $T > 160\text{MeV}$.

Surge naturalmente a questão de por que tantos hádrons massivos podem ser excitados a alta temperatura T . A razão é que a densidade de estados $\tau(M)$ de hádrons com massa M pode crescer exponencialmente quando M aumenta, o que resulta em uma compensação para o fator de supressão de Boltzmann $\exp(-M/T)$ (R. Hagedorn, *Lecture Notes Phys.221 (1985) 53*):

$$\tau(M \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{c}{M^a} e^{+M/T_0}, \quad n_{\text{tot}}(T) = \int_0^\infty dM n(T; M) \tau(M)$$

Nesta expressão, $n_{\text{tot}}(T)$ é a densidade de número total de hádrons no sistema e $n(T; M)$ é a densidade de número de um hádron com massa M . Observando o espectro hadrônico, $a = 2 - 3$ e $T_0 = 150 - 200\text{MeV}$.

Isto significa que não podemos ignorar os hádrons massivos em $T \sim T_0$. Na verdade, a integral acima diverge para $T > T_0$, o que quer dizer que T_0 é a temperatura máxima a ser considerada para o gás de hádrons. Mesmo se injetarmos calor no sistema a partir do exterior, essa energia será consumida para excitar ressonâncias, e não poderá contribuir para aumentar a temperatura. Esta é conhecida como a **temperatura limite de Hagedorn**. Em QCD, porém, podemos ir além desse limite, uma vez que os hádrons têm tamanhos finitos e podem se superpor uns aos outros, como em um processo de **percolação**, para formar o QGP.

4.4. EQUAÇÃO DE ESTADO PARAMETRIZADA

É possível construirmos uma EOS além do modelo de sacola, para aprofundarmos o estudo da transição de fase da QCD a temperatura finita. Uma observação chave é que as densidades de pressão e energia estão relacionadas de forma simples com a densidade de entropia:

$$P(T) = \int_0^T s(t) dt,$$

$$\varepsilon(T) = Ts(T) - P(T)$$

Consideramos $P(T=0) = 0$. Podemos obter também a velocidade do som c_s a partir de $s(T)$:

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \left[\frac{\partial \ln s(T)}{\partial \ln T} \right]^{-1}$$

Portanto, procedendo a uma parametrização apropriada de $s(T)$, outras quantidades poderão ser automaticamente obtidas. A parametrização mais simples que satisfaz a desigualdade termodinâmica $\partial s(T)/\partial T \geq 0$ e a terceira lei da termodinâmica $s(T \rightarrow 0) \rightarrow cte.$ é:

$$s(T) = f(T)s_H(T) + (1 - f(T))s_{\text{QGP}}(T),$$

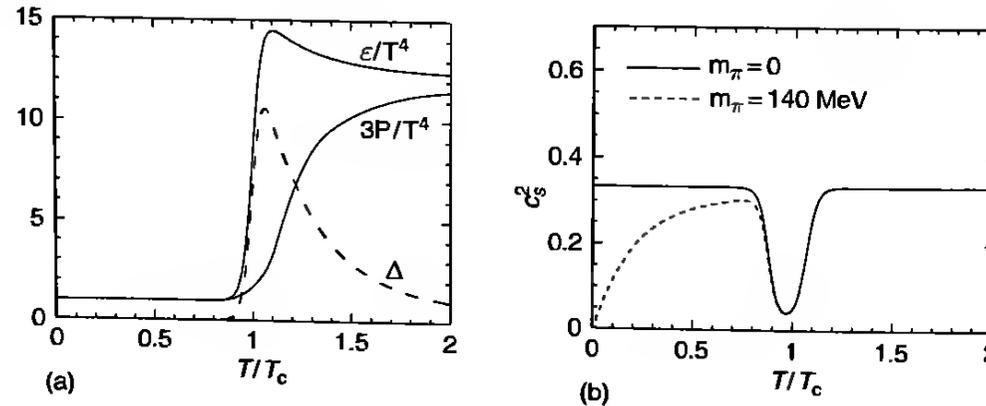
$$f(T) = \frac{1}{2} [1 - \tanh((T - T_c)/\Gamma)].$$

Nesta expressão, a densidade da entropia do gás de píons não interagentes no limite de baixas temperaturas e a densidade de entropia do QGP no limite de altas temperaturas são, respectivamente:

$$s_H(T) = 4d_\pi(\pi^2/90)T^3$$

$$s_{\text{QGP}}(T) = 4d_{\text{QGP}}(\pi^2/90)T^3$$

A densidade de entropia $s(T)$ exibe um salto no intervalo $|T - T_C < \Gamma|$. Combinando as equações anteriores que relacionam $P(T)$ e $\varepsilon(T)$ a $s(T)$ com as expressões acima, obtemos uma EOS que apresenta pelo menos duas vantagens sobre a EOS do modelo de sacola: (i) o parâmetro fenomenológico B passa a ser desnecessário; (ii) agora, não apenas a transição de primeira ordem, mas também uma transição de fase suave (*crossover*), ambas podem ser tratadas termodinamicamente de uma forma consistente, como ilustram os gráficos abaixo.



Em (a), $\Gamma/T_C = 0,05$ e $N_f = 2$. A linha tracejada representa $\Delta = (\varepsilon - 3P)/T^4$. No gráfico (b), a velocidade do som se aproxima de zero no ponto crítico. A linha tracejada ilustra o caso de quarks com massas finitas, em que a velocidade do som se aproxima de zero em $T = 0$.

5. TRANSIÇÃO DE FASE QUIRAL

Uma resumida explanação do alcance de uma teoria quiral efetiva é dada por um de seus criadores em 1973, o físico suíço Heinric Leutwyler (*Ann. Phys.* 235 (1994) 165):

The pioneering work on chiral perturbation theory was based on global symmetry considerations [1–4]. The key observation, which gave birth to this development, is that a suitable effective field theory involving Goldstone fields automatically generates transition amplitudes which obey the low energy theorems of current algebra and PCAC. The interaction among the Goldstone bosons is described by an effective Lagrangian, which is invariant under global chiral transformations. The insight gained thereby not only led to a considerable simplification of current algebra calculations, but also paved the way to a systematic investigation of the low energy structure [5–7].

The line of reasoning used to determine the form of the effective theory, however, is of heuristic nature—a compelling analysis, which derives the properties of the effective Lagrangian from those of the underlying theory, is still lacking. The problem with the standard “derivation” is that it is based on *global* symmetry considerations. Global symmetry provides important constraints, but does not suffice to determine the low energy structure. A conclusive framework only results if the properties of the theory are analyzed off the mass shell: one needs to consider Green functions and study the Ward identities which express the symmetries of the underlying theory at the *local* level.

Obs.: PCAC é abreviação de *Partially Conserved Axial Current*. “Traduzindo” para os termos atuais, PCAC significa **quebra espontânea de simetria quiral da corrente**.

A anomalia ABJ é um exemplo da insuficiência da análise a partir de uma simetria global: embora a lagrangiana da QCD com quarks de massa nula seja invariante quanto à rotação quirial

$$\text{SU}_L(N_f) \times \text{SU}_R(N_f)$$

a menos que $N_f \leq 2$, o operador

$$\bar{q}q = \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L$$

não é invariante. Logo, o VEV térmico $\langle \bar{q}q \rangle$ é uma medida – embora não necessariamente única – da quebra dinâmica da simetria quirial global a uma temperatura finita T :

$$\langle \bar{q}q \rangle = 0: \quad \text{a fase de Wigner;}$$

$$\langle \bar{q}q \rangle \neq 0: \quad \text{a fase de Nambu-Goldstone (NG).}$$

À medida que T aumenta, o pareamento $\bar{q}q$ é desfeito por flutuações térmicas, e, eventualmente, pode se processar a transição da fase NG para a fase de Wigner. Este processo é análogo à transição de fase nos supercondutores metálicos, onde o parâmetro de ordem é o pareamento de Cooper $\langle e_\uparrow e_\downarrow \rangle$. E, de fato, a noção de quebra dinâmica de simetria quirial foi introduzida originalmente por Nambu e Jona-Lasinio em analogia com a supercondutividade BCS. Adicionalmente, a massa do quark em $m\bar{q}q$, que desempenha um papel similar a um campo magnético externo, quebra explicitamente a simetria quirial.

Existem diversas questões a serem respondidas: (i) qual é a temperatura crítica da transição de fase quirial? (ii) qual será a ordem da transição quirial? (iii) qual será o fenômeno observável associado com a transição quirial?

5.1. O CONDENSADO QUIRAL $\langle \bar{q}q \rangle$

Vamos começar com a função de partição da QCD:

$$Z = \text{Tr} \left[e^{-\hat{K}_{\text{QCD}}/T} \right] = e^{-\Omega(T,V,\mu)/T} = e^{P(T,\mu)V/T}.$$

$$\hat{K}_{\text{QCD}} = \hat{H}_{\text{QCD}}(m_q = 0) + \sum_{q=u,d,s,\dots} \int d^3x \bar{q}(m_q - \mu_q \gamma_0)q.$$

Nesta expressão, m_q é a massa do quark e μ_q o seu potencial químico, para cada sabor, e temos que:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{\partial P(T, \mu)}{\partial m_q}.$$

Vamos agora calcular o lado direito desta equação para $\mu_q = 0$ e $m_q \approx 0$ em dois casos extremos: o limite para T elevada e o limite para T baixa.

5.1.1. A EXPANSÃO EM ALTAS TEMPERATURAS

Quando T é suficientemente elevada, vamos supor que o sistema possa ser aproximado pelo gás de Stefan-Boltzmann de quarks e glúons livres. Neste caso, a pressão total quando $\mu_q = 0$ é escrita como uma soma, $P(T) = P_{gluon}(T) + P_{quark}(T)$. A massa dos quarks entra apenas em $P_{quark}(T)$, cuja forma explícita é $\sum_q P_q(T; m_q)$, onde:

$$\begin{aligned} P_q(T; m_q) &= 4N_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} T \ln \left(1 + e^{-E_q(k)/T} \right) \\ &\simeq 4N_c \frac{7}{8} \left[\frac{\pi^2}{90} T^4 - \frac{1}{42} m_q^2 T^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{56\pi^2} m_q^4 \left(\ln \left(\frac{m_q^2}{(\pi T)^2} \right) + C \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

Nesta expressão,

$$\begin{aligned} E_q(k) &= (k^2 + m_q^2)^{1/2} \\ C &= 2\gamma - 3/2 \simeq -0.346 \end{aligned}$$

onde

$$\gamma \simeq 0.577$$

é a constante de Euler-Mascheroni. Esta expansão é obtida a partir da expansão em altas temperaturas do grande potencial para férmions, em termos de m_q/T :

$$\begin{aligned} &\Omega_F(T, V, 0)/V \\ &= -\frac{7}{8} d \left[\frac{\pi^2}{90} T^4 - \frac{m^2 T^2}{42} - \frac{m^4}{56\pi^2} \left(\ln \left(\frac{m^2}{(\pi T)^2} \right) + C \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

Em virtude da ausência nesta expansão do termo linear em m_q , o valor esperado $\langle \bar{q}q \rangle$ é nulo para o limite quiral $m_q \rightarrow 0$ em altas temperaturas. Embora este resultado tenha sido mostrado somente para o caso de um gás de quarks e glúons livres, é imediato concluir que também será válido para o caso de quarks e glúons interagentes, pelo menos enquanto a abordagem perturbativa for aplicável. A razão disto é que o vértice de interação diagramático quark-glúon não altera a quiralidade, isto é, a transição entre q_R e q_L não é permitida, o que acarreta que o VEV do operador:

$$\bar{q}q = \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L$$

será zero em qualquer ordem finita de perturbação, se $m_q = 0$.

5.1.2. A EXPANSÃO EM BAIXAS TEMPERATURAS

Quando T é suficientemente baixa e $\mu_q = 0$, o sistema é composto por um gás de píons fracamente interagente, e a pressão total pode ser decomposta como $P(T) = P_\pi(T) + P_{vac}(T)$. Por definição, $\langle \bar{q}q \rangle_{vac} = -\partial P_{vac} / \partial m_q$. Por outro lado, $P_\pi(T)$ em baixa T pode ser calculada na teoria quiral perturbativa através da forma euclidiana da função de partição efetiva da teoria:

$$e^{P_\pi(T)V/T} = \int [dU] e^{-\int_0^{1/T} d^4x (\mathcal{L}^{(2)}(U) + \mathcal{L}^{(4)}(U) + \mathcal{L}^{(6)}(U) + \dots)}$$

Nesta expressão, $U(x)$ é um campo no espaço $SU(N_f)$ que está relacionado com o campo de pión através da relação $U = \exp(i\lambda^j \pi^j)$, onde $j = 1, \dots, (N_f^2 - 1)$ (v. P. Gerber e H. Leutwyler, *Nucl. Phys. B321 (1989) 387*)

Usando agora as relações GOR, podemos fazer a mudança de variáveis de m_q para m_π para obter:

$$\begin{aligned} \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{\langle \bar{q}q \rangle_{vac}} &= 1 + \frac{1}{f_\pi^2} \frac{\partial P_\pi(T)}{\partial m_\pi^2} \Big|_{m_\pi \rightarrow 0} \\ &= 1 - \frac{T^2}{8f_\pi^2} - \frac{1}{6} \left(\frac{T^2}{8f_\pi^2} \right)^2 - \frac{16}{9} \left(\frac{T^2}{8f_\pi^2} \right)^3 \ln \left(\frac{\Lambda_q}{T} \right) + O(T^8) \end{aligned}$$

Nesta expressão,

$$\Lambda_q (= 470 \pm 110 \text{ MeV})$$

é um parâmetro fenomenológico extraído do espalhamento pión-pión (Gerber e Leutwyler (1989)). A contribuição em T^2 se deve somente ao gás não interagente de píons.

Tanto a expansão em baixas temperaturas quanto a expansão em altas temperaturas, ambas apontam fortemente no sentido de que o condensado quiral decresce quando T aumenta, e eventualmente desaparece quando T é suficientemente alta, restaurando assim a simetria quiral. A teoria de calibre da QCD na rede leva à mesma conclusão. Veremos a seguir o

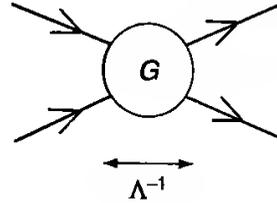
modelo NJL como sendo um modelo da QCD para baixas energias, capaz de extrair a física por detrás da restauração quiral a T finita.

5.2. O MODELO NJL EM DETALHE

A versão mais simplificada da lagrangiana do modelo NJL, para quarks com dois sabores ($N_f = 2$), no espaço-tempo euclidiano, é:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{q}(-i\gamma_\mu \partial_\mu + m)q - \frac{G^2}{2\Lambda^2}[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \tau q)^2],$$

onde ${}^t q(x) = (u(x), d(x))$ e $m = \text{diag}(m_u, m_d) = m \cdot \mathbf{1}$, e, para simplificar, foi assumida a simetria de isospin $m_u = m_d$. Observe-se que G é uma constante de acoplamento adimensional responsável pela atração $q\bar{q}$, e Λ^{-1} é uma distância característica abaixo da qual a interação $q\bar{q}$ pode ser considerada pontual no espaço-tempo, como mostra o diagrama abaixo, correspondente à interação quártica fermiônica do modelo. No espaço de coordenadas, a dimensão da região de interação é $\mathcal{O}(\Lambda^{-1}) \sim 0,2 \times 10^{-15} m = 0,2 \text{ fm}$



A função de partição do modelo para T finita e potencial químico igual a zero é dada por:

$$\begin{aligned} Z_{\text{NJL}} &= \int [d\bar{q} dq] e^{-\int_0^{1/T} d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{\text{NJL}}} \\ &\equiv \int [d\Sigma] e^{-S_{\text{eff}}(\Sigma; T)} \end{aligned}$$

Nesta última expressão,

$$\Sigma(x) (= \sigma(x) + i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\pi}(x))$$

é um campo bosônico matricial 2×2 no espaço de isospin, e

$$[d\Sigma] = [d\sigma \ d\boldsymbol{\pi}].$$

A ação efetiva que aparece como exponencial negativo pode ser escrita de forma explícita como:

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}(\Sigma; T) = & -\text{Tr} \ln (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \partial + m + G\Sigma) \\ & + \int_0^{1/T} d\tau \int d^3x \left(\frac{\Lambda^2}{2} \Sigma(x) \Sigma(x)^\dagger \right). \end{aligned}$$

O operador Tr resume o traço sobre cor, sabor, spin e coordenadas espaço-temporais. O argumento de " $\text{Tr} \ln$ " é simplesmente uma contribuição fermiônica com massa constante $M = m + G\sigma$, e pode ser facilmente calculada como sendo igual a:

$$f_{\text{eff}}(\sigma; T) = \frac{\Lambda^2}{2} \sigma^2 + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{-d_q E(k)}{2} - d_q T \ln \left(1 + e^{-E(k)/T} \right) \right]$$

Nesta expressão, $E(k) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + (m + G\sigma)^2}$, e $d_q (= 2_{\text{spin}} \times 2_{q\bar{q}} \times N_c \times N_f = 24)$ é exatamente o fator de degeneração de quarks já mostrado de forma geral.

O primeiro termo do lado direito da equação é a energia de interação originada pela interação quártica fermiônica presente na lagrangiana do modelo. O primeiro termo no integrando é simplesmente a energia fermiônica do ponto zero, multiplicada pelo fator de degeneração, para o quark e o antiquark. Finalmente, o último termo do integrando está relacionado ao termo de entropia ($-Ts$) dos quarks excitados termicamente. Logo, a energia livre possui a desejada estrutura $f_{\text{eff}} = \varepsilon - Ts$. Define-se então como $\bar{\sigma}$ um mínimo verdadeiro de $f_{\text{eff}}(\sigma; T)$.

A equação $\partial f_{\text{eff}} / \partial \sigma = 0$, usada como condição estacionária para se obter a expressão acima de f_{eff} , é chamada de equação de diferença (*gap equation*), em analogia mis uma vez com uma equação similar da supercondutividade BCS.

A massa de quark M_q adquirida dinamicamente devido à quebra de simetria quiral, ou **massa constituinte**, e o condensado quiral $\langle \bar{q}q \rangle$, estão relacionados a $\bar{\sigma}$ no limite quiral $m = 0$ como:

$$M_q = G\bar{\sigma}, \quad \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle = -\frac{\Lambda^2}{G}\bar{\sigma}.$$

5.2.1. QUEBRA DINÂMICA DE SIMETRIA EM $T = 0$

Vejamos em primeiro lugar como a quebra dinâmica de simetria quiral se manifesta no modelo NJL, com base na equação acima para $f_{\text{eff}}(\sigma; T)$, em $T = m = 0$.

Uma vez que o modelo está formulado para baixas energias abaixo da escala Λ , podemos limitar a integral de momentum à região $|\mathbf{k}| \leq \Lambda$. E também, para simplificar a notação, vamos reescalar as quantidades dimensionais em termos de Λ e reescrever $f_{\text{eff}}/\Lambda^4 \rightarrow f_{\text{eff}}$. Após expandirmos a expressão exata da energia livre na vizinhança de $\sigma \sim 0$ e fazermos $G_c = \pi\sqrt{8/d_q}$, teremos então que:

$$f_{\text{eff}}(\sigma, 0) = -\frac{d_q}{16\pi^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G^2} - \frac{1}{G_c^2} \right) (G\sigma)^2 \\ + \frac{d_q}{64\pi^2} (G\sigma)^4 \ln \left(\frac{4}{(G\sigma)^2} \right) + O(\sigma^6)$$

O coeficiente do termo em σ^2 troca de sinal quando $G = G_c$, o que indica uma transição de fase de segunda ordem da fase de Wigner (primeira relação abaixo) para a fase NG (segunda relação abaixo):

$$G \leq G_c \rightarrow \bar{\sigma} = 0$$

$$G > G_c \rightarrow \bar{\sigma} \neq 0$$

A equação de *gap* será dada por:

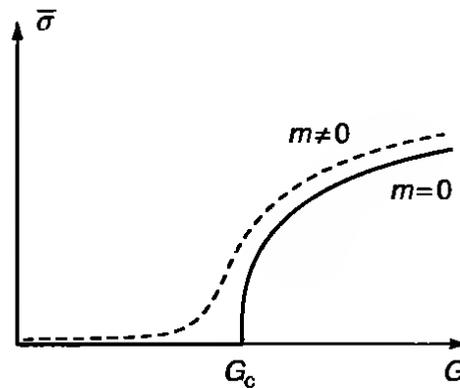
$$\frac{G_c^2}{G^2} \simeq 1 - \frac{1}{2}(G\sigma)^2 \ln\left(\frac{4}{(G\sigma)^2 e}\right).$$

A solução desta equação pode ser escrita em termo da função de Lambert (do matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777), o primeiro a demonstrar, em 1768, a irracionalidade de π . Em 1758, Lambert definiu a equação transcendental para a função $W(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, cuja expressão mais empregada $z = W(z)\exp\{W(z)\}$, porém, somente foi descrita em 1925).

A forma assintótica dessa solução nas proximidades do ponto crítico é:

$$\bar{\sigma} \propto \sqrt{\frac{G^2 - G_c^2}{-\ln(G^2 - G_c^2)}} \quad (G \searrow G_c).$$

A linha cheia no gráfico abaixo é uma representação esquemática, em termos de G , desta função:



5.2.2.RESTAURAÇÃO DA SIMETRIA EM $T \neq 0$

Consideremos agora o caso $G > G_c$, em que o sistema está na fase NG em $T = 0$. Neste caso, espera-se que a restauração da simetria quiral seja crescente com o incremento de T .

Na transição de fase de segunda ordem, o condensado $\bar{\sigma}(T)$ a temperatura finita é uma função contínua de T , e se aproxima de zero próximo ao ponto crítico $T \sim T_c$. Com essa visão antecipada, a energia livre f_{eff} será expandida não só por σ/Λ , mas também por σ/T , para que não seja suprimido o efeito do *cutoff* do momentum, $\mathcal{O}(\exp\{-\Lambda/T\})$ quando $\Lambda \gg T$. Reescalando as grandezas dimensionais em termos de Λ e usando a expansão para altas temperaturas, temos que:

$$f_{eff}(\sigma, T) = -\frac{d_q}{16\pi^2} - d_q \frac{7\pi^2}{8 \cdot 90} T^4$$

$$+ \frac{d_q}{48} (T^2 - T_c^2) (G\sigma)^2$$

$$+ \frac{d_q}{64\pi^2} (G\sigma)^4 \left[\ln \left(\frac{1}{(\pi T)^2} \right) + C \right] + \mathcal{O}(\sigma^6),$$

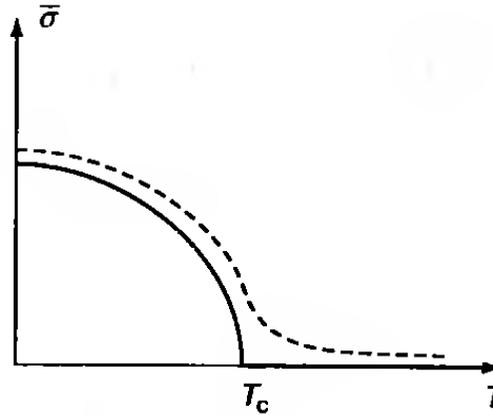
$$T_c = \sqrt{\frac{24}{d_q} \left(\frac{1}{G_c^2} - \frac{1}{G^2} \right)}.$$

O termo proporcional a T^4 na equação acima representa o valor de Stefan-Boltzmann para os quarks de massa nula; o coeficiente do termo em σ^2 troca de sinal em $T = T_c$, enquanto que o termo em σ^4 é positivo quando $T \ll 1$. Este é exatamente o comportamento esperado para uma transição de fase de segunda ordem.

É importante observar que, nas proximidades de T_c , $\bar{\sigma}(T)$ e o condensado quiral associado podem ser extraídos dessa equação e da relação $\langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle = -\bar{\sigma} \Lambda^2 / G$:

$$\langle \bar{q}q \rangle \propto \begin{cases} 0 & (T \geq T_c), \\ -(T^2 - T_c^2)^{1/2} & (T < T_c). \end{cases}$$

A linha cheia no gráfico abaixo representa esquematicamente $\bar{\sigma}(T)$, para T finito:



Tal como no caso da teoria BCS, podemos extrair da equação de *gap* $\partial f_{eff}(\sigma; T) / \partial \sigma = 0$, calculada nos pontos $T = 0$ e $T = T_c$, uma conexão direta entre T_c e o *gap* de massa a temperatura zero, $M_0 = G\bar{\sigma}(T)$. Temos então, para $\Lambda \gg \sigma, T$:

$$T_c \simeq \frac{\sqrt{3}}{\pi} M_0 = 0.55 M_0.$$

Substituindo o valor padrão para a massa dinâmica, $M(T=0) \sim 300MeV - 350MeV$, obtemos $T_c \sim 165MeV - 190MeV$, consistente com os resultados obtidos pelas simulações da QCD na rede.

Como já foi mencionado acima, a massa de quark diferente de zero tem o mesmo papel que o campo magnético externo na BCS, o que é mostrado pela suavidade das linhas tracejadas nos dois gráficos anteriores, características de uma transição de segunda ordem suave. Esses resultados podem ser calculados explicitamente no modelo NJL.

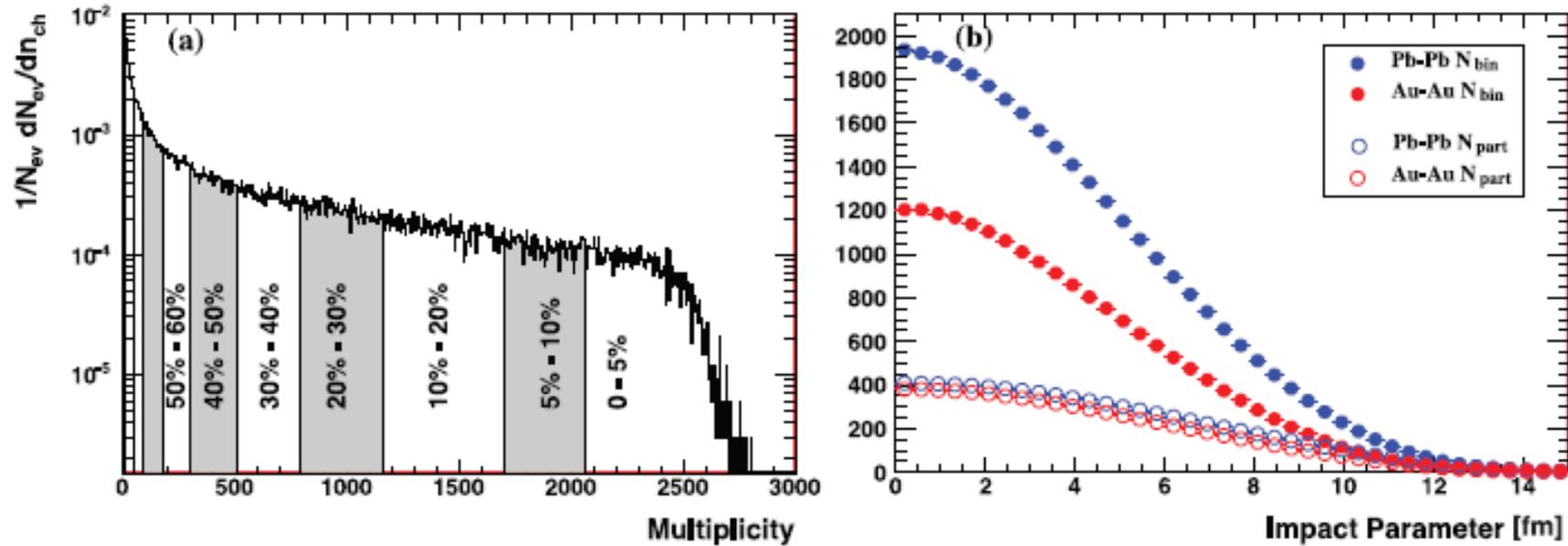
A expansão da energia livre $f_{eff}(\sigma, T)$ em termos de σ na vizinhança do ponto crítico permite que se elaborem considerações termodinâmicas gerais quanto às transições de fase, sem necessidade de conhecer a fundo a dinâmica dos processos. Um método para esse estudo é a teoria do campo médio baseada no funcional de Landau, que apresenta três casos de interesse, todos eles presentes na QCD: transição de primeira ordem e transição de segunda ordem, quando existem apenas duas fases e um ponto crítico onde a coexistência entre as fases termina; e o ponto tricrítico, onde termina a coexistência entre três fases diferentes. Não aprofundaremos esse estudo, porém, por motivos de foco no objetivo do curso, que é a fenomenologia das interações no cone de luz entre núcleos pesados.

6. COLISÕES RELATIVÍSTICAS ENTRE ÍONS PESADOS

Como já foi visto, o QGP pode ser gerado ou por aquecimento ou por compressão da matéria hadrônica. Os eventos realizáveis em laboratórios que reúnem as condições necessárias para a produção de QGP, em ambos os casos, são as colisões relativísticas de íons pesados. Colisões na faixa de energia entre 1 GeV e 50-60 GeV por núcleon se caracterizam pela inelasticidade que faz com que os íons parem e se fundam, total ou parcialmente, de forma que, teoricamente, possam ser atingidas altas densidades bariônicas, simulando o interior de uma estrela compacta. A medida da fusão entre os íons é o **poder de frenagem nuclear** (*nuclear stopping power*). Nas colisões mais energéticas, acima de 100 GeV/A, os dois íons pesados se atravessam mutuamente, e a região entre ambos, por um intervalo de tempo muito curto, atinja altas temperaturas, embora tenha densidade bariônica baixa. A medida do grau de invisibilidade de um íon em relação ao outro é dada pela **transparência nuclear** (*nuclear transparency*).

Íons pesados são objetos estendidos, e o sistema criado em uma colisão frontal é diferente daquele criado por uma colisão periférica, o que obriga a que as colisões sejam categorizadas pela **centralidade**. Teoricamente, a centralidade é definida pelo **parâmetro de impacto** b , o qual, entretanto, não pode ser observado diretamente. A centralidade, portanto, precisa ser inferida experimentalmente pelas multiplicidades de partículas geradas que são detectadas, onde se assume que essa multiplicidade é uma função monotônica de b . Mede-se então a centralidade pela fração $\pi b^2 / \pi (2R_A)^2$ da seção de choque geométrica, onde R_A é o raio nuclear.

O gráfico (a) abaixo reúne dados obtidos pelo experimento ALICE no LHC, para colisões Pb-Pb e $\sqrt{s_{NN}} = 2,76\text{TeV}$, mostrando uma classificação em percentis de centralidade; o gráfico (b) plota o número de núcleons participantes N_{part} e

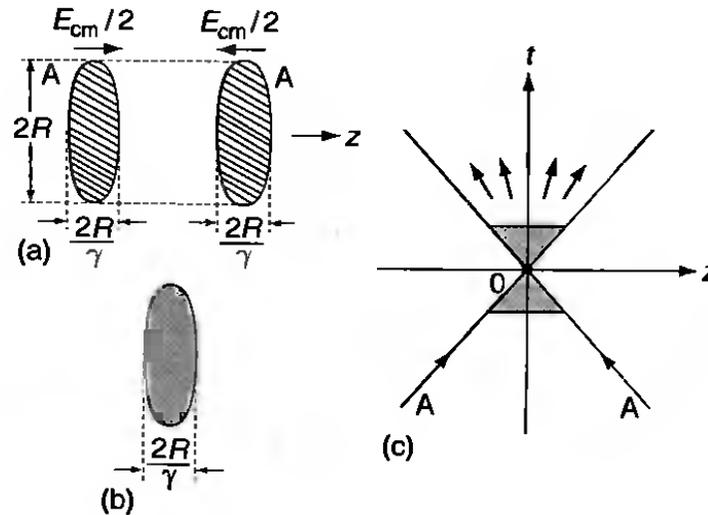


de colisões binárias N_{bin} versus o parâmetro de impacto para colisões Pb-Pb com $\sqrt{s_{NN}} = 2,76\text{TeV}$, no ALICE, e Au-Au com $\sqrt{s_{NN}} = 0,2\text{TeV}$, no RHIC. A centralidade também pode ser definida por N_{part} ou N_{bin} ,

6.1. REPRESENTAÇÃO DAS COLISÕES NO ESPAÇO-TEMPO

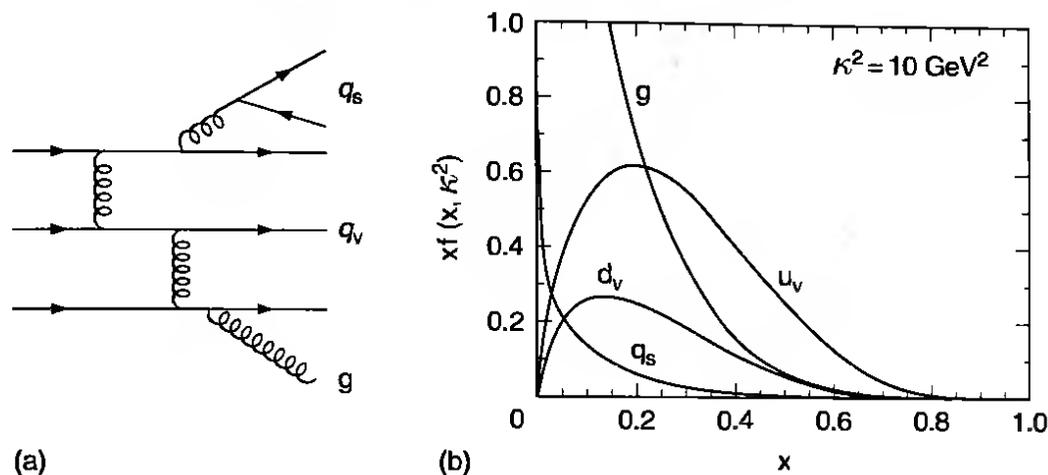
Consideremos uma colisão central entre dois núcleos a e b , cada um com número de massa A , no referencial de centro de momentum no qual a energia E_{cm} por núcleon é representada por $\sqrt{s_{NN}}$, onde s é a variável de Mandelstam definida como $s \equiv (p_a + p_b)_\mu (p_a + p_b)^\mu$. Nesse referencial, os núcleons se configuram como duas “pizzas” na direção longitudinal das trajetórias, deformados que são pela contração de Lorentz até uma espessura $2R/\gamma_{cm}$, onde $\gamma_{cm} = E_{cm}/2m_N$ é o fator de Lorentz.

Na representação das colisões entre hádrons de altas energias que Landau introduziu em 1953, juntamente com as equações da hidrodinâmica relativística, os núcleons são freados e se superpõem, produzindo então novas partículas, em uma região com as dimensões da matéria nuclear. Em sequência à superposição, o sistema de partículas, aquecido e rico em bárions, sofre uma expansão hidrodinâmica, principalmente ao longo do eixo z do feixe incidente. Na figura abaixo, os diagramas (a) e (b) mostram de forma esquemática a sequência do processo de colisão, e o gráfico (c) esquematiza a situação na representação do cone de luz.



À medida que a energia de colisão dos núcleons no centro de momentum cresce acima de 100 GeV/A, a representação relativística de Landau deve ser substituída pela representação ultrarrelativística de Bjorken, proposta em 1976, que se baseia no modelo de pártons dos hádrons, e difere da de Landau em dois aspectos principais: (i) a existência de mini-pártons (*wee partons*), ou seja, quarks e glúons virtuais; (ii) a dilatação temporal da produção de partículas. A proposta de Bjorken se apoia declaradamente na visão de Feynman da colisão entre duas “pizzas congeladas no tempo” que se atravessam, e pode ser brevemente exposta da seguinte forma.

Os experimentos de espalhamento inelástico profundo entre léptons e hádrons realizados no SLAC desde o final da década de 1960 deixaram claro que o núcleon é composto por quarks de valência e mini-pártons. Estes últimos possuem uma fração x do momentum do núcleon muito inferior à dos quarks de valência, e seu número aumenta quando x tende a zero, como mostrado na figura (b) abaixo.

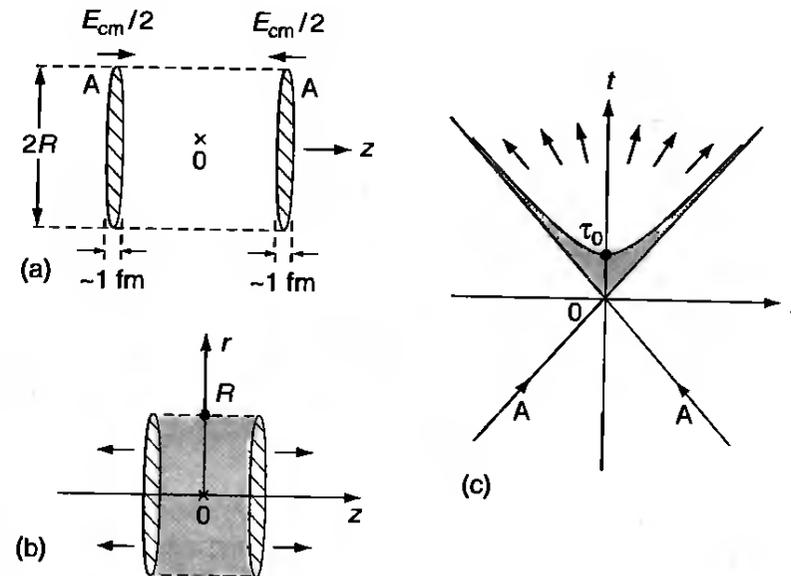


Os mini-pártons podem ser considerados como flutuações do vácuo que se acoplam aos quarks de valência que se encontram em movimento ultrarrápido através do vácuo da QCD. Uma forma alternativa de interpretar os mini-pártons, introduzida em 2004, é considerá-los como um campo clássico coerente criado por uma fonte de pártons rápidos chamada de **condensado de vidro de cor** (*color glass condensate*). Devido à sua natureza não perturbativa, o momentum típico p de um mini-párton

é da ordem de $\Lambda_{QCD} \sim 200 MeV$, a escala de energia das interações fortes da QCD. E, uma vez que os núcleons e os próprios núcleos estão sempre associados com esses mini-pártons com baixo momentum, a dimensão longitudinal Δz de hádrons ou de núcleos não pode ser inferior a $1/p \sim 1 fm$, em razão do princípio da incerteza em energias ultra-altas:

$$\Delta z \geq \frac{1}{p} \approx 1 \text{ fm.}$$

Conforme mostrado na parte (a) da figura abaixo, onde dois núcleos se aproximam com velocidades ultrarrelativísticas e parâmetro de impacto zero, vistos no referencial c.m.:



O esquema (b) acima ilustra o instante após os núcleos se atravessarem mutuamente, deixando entre eles uma região com matéria a altas temperaturas e baixa densidade bariônica. Por último, em (c) está o diagrama de cone de luz da colisão de Bjorken, onde a área sombreada representa a matéria altamente excitada.

Os dois núcleos em colisão, portanto, nas palavras de Bjorken, vestem “o casaco de peles de mini-pártons” de tamanho típico 1fm, enquanto que o tamanho longitudinal da função de onda de um quark de valência é $\sim 2R/\gamma_{cm}$. Isto significa que se espera que os mini-pártons tenham um papel vital em energias ultra-altas que preencham o requisito seguinte:

$$\gamma_{cm} > \frac{2R}{1 \text{ fm}}.$$

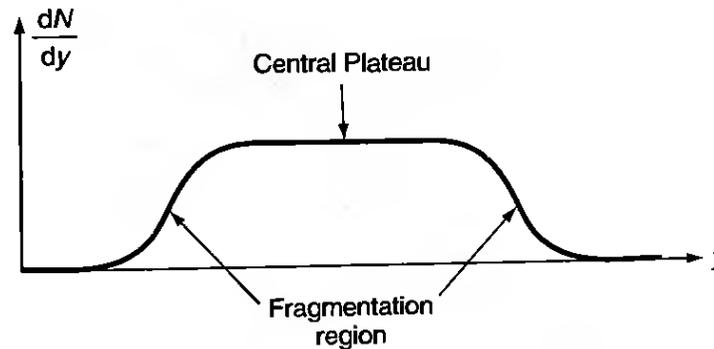
Após a colisão central de dois feixes de pártons, muitos quanta virtuais e/ou uma configuração coerente de glúons estarão excitados, conforme o esquema (b) na figura anterior. E leva um certo tempo próprio τ_{de} de descoerência, ou desexcitação, para esses quanta retornarem aos estados de quarks e glúons reais. Este tempo próprio seria tipicamente uma fração de $1 \text{ fm}/c \sim 10^{-23} \text{ s} \propto \Lambda_{QCD}^{-1}$, ou mesmo $\sim 10^{-25} \text{ s}$. O estado da matéria para $0 < \tau < \tau_{de}$ é chamado de “estágio de pré-equilíbrio”.

Uma vez que τ_{de} é definido no referencial de repouso de cada quantum, ele sofre a dilatação de Lorentz e se transforma em $\tau = \gamma \tau_{de}$ no referencial c.m., no qual γ é o fator de Lorentz de cada quantum. Isto implica que as partículas lentas irão emergir primeiro perto do ponto de colisão, enquanto as partículas rápidas emergem por último, distantes do ponto de colisão, como ilustra o diagrama de cone de luz (c) acima. Este fenômeno, que a representação de Landau não leva em conta, é chamado de **cascata interna-externa** (*inside-outside cascade*).

Os pártons reais produzidos durante o processo de desexcitação interagem entre si e constituem um QGP em equilíbrio. Define-se então um tempo próprio $\tau_0 > \tau_{de}$ quando o sistema está em equilíbrio, e τ_0 não dependerá apenas da seção de choque básica par-ton-par-ton, mas também da densidade de pártons produzidos no estágio de pré-equilíbrio. Espera-se que τ_0 seja da ordem de $1 \text{ fm}/c \sim 10^{-23} \text{ s}$ ou fração. A matéria excitada produzida na colisão resfria-se após esse tempo, vindo a se hadronizar em mésons e bárions, que poderão eventualmente ser observados nos detectores.

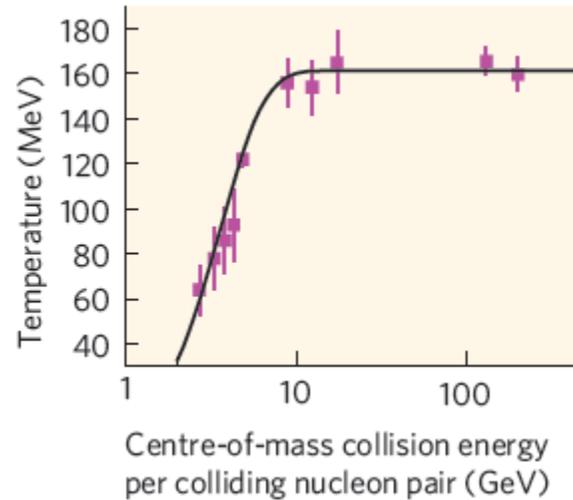
6.2. PLATÔ CENTRAL E REGIÃO DE FRAGMENTAÇÃO

Na colisão central ultrarrelativística ilustrada pela figura anterior, espera-se que a distribuição da rapidez dos hádrons em energias assintoticamente altas se comporte como mostra a figura abaixo, onde y é a **rapidez**:



Na região intermediária entre a rapidez inicial do alvo, y_T , e a do projétil, y_P , emerge uma região central de rapidez sem bárions. Nesta região, a multiplicidade média por intervalo unitário de rapidez, dN/dy , é aproximadamente constante e forma, portanto, um platô central. A produção de quanta virtuais originada pelas interações entre mini-pártons é dominante nessa região, e a própria estrutura do platô pode ser entendida como uma consequência da desexcitação de cada quantum segundo seu tempo próprio τ_{de} . O QGP sem a presença de bárions deve ser produzido nessa região do platô central. A altura e a largura do platô central dependem de dois fatores: a energia de colisão do sistema no referencial c.m., e o número de massa nuclear A .

O gráfico abaixo reproduz dados experimentais obtidos no RHIC até 2006, comparados com a curva da análise estatística dos hádrons produzidos, mostrando claramente um platô inicial de temperatura versus a energia $\sqrt{s_{NN}}$ de colisão no c.m.



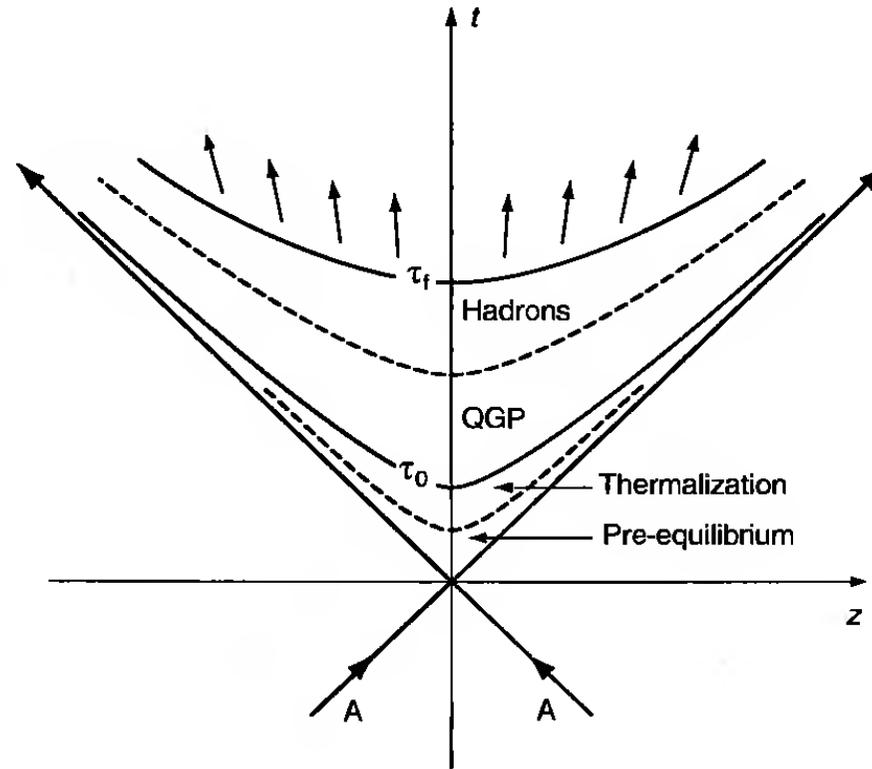
Por outro lado, existem regiões de fragmentação, ricas em bárions altamente excitados, nas proximidades das rapidezzes iniciais do alvo e do projétil. Essas regiões podem ser melhor estudadas, não no referencial c.m., mas no referencial fixo em um dos núcleos, considerado em repouso. Neste referencial e em uma colisão frontal, um núcleo esférico com o raio proporcional a $A^{1/3}$ é varrido por uma pizza nuclear contraída pelo fator de Lorentz com uma área aparente de $A^{2/3}$.

A largura Δy_f da região de fragmentação pode ser grosseiramente estimada da seguinte forma. Consideremos uma partícula com fator de Lorentz γ que foi produzida na região de fragmentação no referencial de repouso do núcleo alvo. Somente quando $\gamma\tau_{de} \lesssim R$, sendo $R \sim 1,2A^{1/2} fm$ o raio do núcleo, essa partícula pode reinteragir no interior do núcleo e produzir uma cascata para formar a região de fragmentação. Usando a definição de rapidez, podemos fazer a seguinte estimativa:

$$\Delta y_f = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + v_z}{1 - v_z}\right) \sim \ln 2\gamma$$

6.3. HISTÓRIA SEQUENCIAL DAS COLISÕES ULTRARRELATIVÍSTICAS AA CENTRAIS

A figura abaixo mostra uma visão esquemática dessa história sequencial no diagrama de espaço-tempo.



Estágio de pré-equilíbrio e termalização: $0 < \tau < \tau_0$

A colisão central ultrarrelativística de íons pesados é um processo produtor de uma enorme entropia. Uma das mais difíceis questões a serem solucionadas é: qual é o mecanismo microscópico de produção de entropia e subsequente termalização? A dificuldade provém de que esse mecanismo envolve forçosamente processos fora do equilíbrio – por exemplo, de transporte quântico – no interior de uma teoria de calibre não abeliana. E essa dificuldade se reflete nas duas classes de modelos propostos: os modelos que consideram as interações coerentes, e os que as consideram incoerentes.

Nos primeiros, a soma incoerente das colisões de pártons incidentes produz minijatos - ou pártons medianamente energéticos (*semi-hard partons*) - que interagem subsequentemente entre si para formar um plasma de pártons no equilíbrio. Empregando o enfoque de uma teoria quântica de transporte, é possível se calcular a produção de minijatos pela QCD perturbativa (pQCD), usando um *cutoff* IV da ordem de 1-2 GeV, enquanto o processo de obtenção do equilíbrio é calculado através da forma relativística da equação de Stefan-Boltzmann aplicada a seções de choque párton-párton dadas pela pQCD.

Já nos modelos de interações coerentes, um exemplo é o da formação de fios e cordas de cor – os campos coerentes de cor, como no modelo de sacola – após o impacto, decaindo esses fios e cordas subsequentemente em pártons reais, através do processo de Schwinger que descreve a produção de pares e^+e^- na QED (p. 298). Uma vez que os pártons reais são produzidos, eles tendem a uma distribuição térmica, por exemplo, ao obedecerem à equação relativística de Boltzmann para colisões de pártons na presença de fundo do campo de cor. Outro exemplo é o modelo baseado no condensado de vidro de cor (CGC – *color glass condensate*), que nada mais é do que uma configuração clássica de glúons com baixo x , ou seja, baixa participação no momentum do núcleon, que estão associados aos núcleos incidentes.

Esses enfoques que tentam descrever um estágio de não equilíbrio termodinâmico ainda não estão suficientemente desenvolvidos para que descrevam de maneira quantitativa os processos de produção de entropia e de termalização. E a dificuldade se origina primordialmente no tratamento correto dos processos dependentes do tempo e não perturbativos em uma teoria não abeliana de calibre.

Vamos assumir apenas que a produção de entropia e a subsequente termalização ocorrem antes do tempo próprio característico, τ_0 , o que é suficiente para a evolução hidrodinâmica do sistema para $\tau > \tau_0$. Alguns modelos hidrodinâmicos

que assumem a produção de um fluido perfeito, com viscosidade nula, indicam que $\tau_0 < 1 \text{ fm}/c \sim 10^{-23} \text{ s}$ descrevem com razoável acerto os resultados experimentais do RHIC.

Evolução hidrodinâmica e congelamento (*freeze-out*): $\tau_0 < \tau < \tau_f$

Uma vez aceito que o equilíbrio térmico é atingido em τ_0 , podemos usar o instrumental da teoria hidrodinâmica relativística para descrever a expansão do sistema. As equações básicas para isso são as que exprimem a conservação do tensor de energia-momentum e do número bariônico:

$$\partial_\mu \langle T^{\mu\nu} \rangle = 0, \quad \partial_\mu \langle j_B^\mu \rangle = 0$$

Em ambas as expressões o valor esperado é obtido em relação ao estado dependente do tempo em equilíbrio térmico local. Primeiramente, quando o sistema pode ser considerado, por aproximação, um fluido perfeito, os valores esperados são parametrizados apenas pela densidade local de energia, ε , e pela pressão local, P . No segundo caso, quando o sistema não é um fluido perfeito, necessitamos de informações adicionais, tais como a viscosidade, a condutividade de calor, e outras grandezas. No primeiro caso, as equações anteriores, suplementadas com a equação de estado $\varepsilon = \varepsilon(P)$, e com condições iniciais apropriadas em $\tau = \tau_0$, podem prever, através de simulações em rede da QCD, a evolução no tempo do sistema, até o ponto em que ele sofre um congelamento, ou seja, entra em equilíbrio, no tempo $\tau = \tau_f$. O intervalo de tempo de maior interesse para a física é este: $\tau_0 < \tau < \tau_f$, no qual a evolução do QGP termalizado leva à transição de fase para o plasma hadrônico.

Congelamento e o pós-equilíbrio: $\tau_f < \tau$

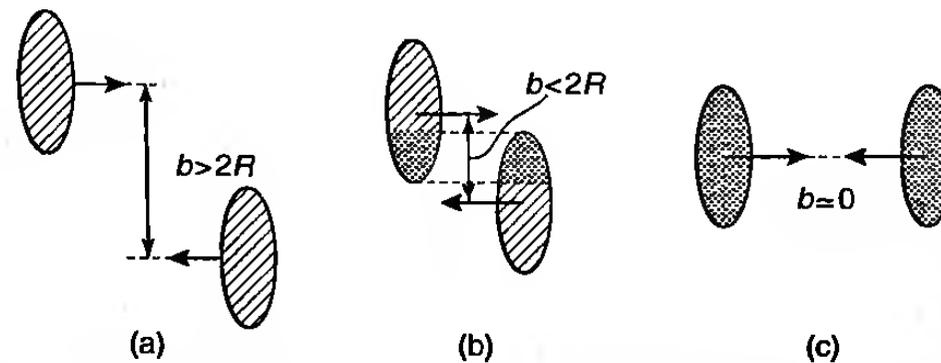
O congelamento do plasma hadrônico pode, eventualmente, ocorrer dentro do tempo próprio τ_f . O congelamento é definido geometricamente por uma hipersuperfície no espaço-tempo, na qual o livre tempo médio das partículas do plasma se torna maior do que a escala de tempo da expansão do plasma, de forma que o equilíbrio térmico não pode mais ser mantido.

Podem ser conceituados dois tipos de congelamento: (i) o químico, no qual o número de cada espécie de partícula se torna constante – o potencial químico é igual a zero -, enquanto o processo de equilíbrio é mantido no espaço de fase; (ii) o congelamento térmico, depois do qual o equilíbrio cinético não pode mais se manter. A temperatura de congelamento químico precisa ser mais alta do que a do congelamento térmico, e ambas, pelo menos em princípio, dependem das espécies hadrônicas envolvidas nos processos.

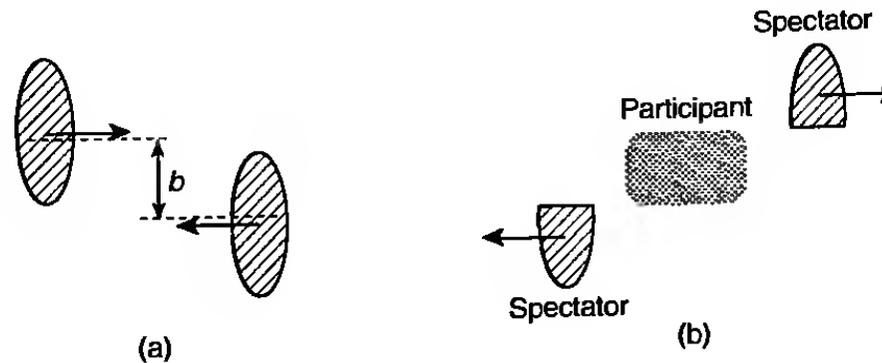
Mesmo depois do congelamento, os hádrons podem interagir entre si, fora do estado de equilíbrio, e esse estado pode ser descrito pela equação relativística de Boltzmann aplicada ao sistema hadrônico.

6.4. GEOMETRIA DAS COLISÕES DE ÍONS PESADOS

Os aspectos geométricos das colisões de alta energia entre íons pesados têm um papel fundamental na dinâmica desses eventos. O comprimento de onda de de Broglie dos núcleons em colisões de alta energia entre íons pesados é muito inferior ao tamanho dos íons. Um bom ponto de partida, portanto, é o parâmetro de choque b , o mesmo conceito clássico usado por Rutherford em 1911 para descobrir a verdadeira distribuição de matéria nos átomos. Na figura abaixo, estão representadas (a) uma colisão distante, (b) uma colisão periférica e (c) uma colisão central.



Na colisão distante ($b > 2R$), a interação eletromagnética predomina, e o resultado pode ser a ruptura do núcleo incidente, do núcleo alvo, ou de ambos. Com a diminuição do parâmetro de impacto b , a interação forte produz um súbito aumento nas reações inelásticas, uma vez que os dois núcleos que colidem se superpõem geometricamente. Os núcleons envolvidos em uma colisão de alta energia entre íons pesados são classificados em dois grupos: o grupo **participante**, que está contido nas regiões sombreadas da figura acima, e o grupo **espectador**, mostrado mais claramente nas áreas hachuradas da figura (b) abaixo, referente ao momento pós-colisão:



Esse tratamento geométrico das colisões ultrarrelativísticas AA é chamado de **modelo participante-espectador**, e tem tido sucesso ao descrever resultados obtidos experimentalmente. Conforme mostram as figuras, o tamanho do participante ou espectador é determinado pelo parâmetro de impacto b , e há uma anticorrelação entre os tamanhos do participante e do espectador. Uma vez que o espectador mantém sua velocidade longitudinal e emerge das colisões aproximadamente a ângulo zero, é relativamente fácil separar experimentalmente o participante do espectador. Na maioria dos experimentos com íons pesados as informações sobre o parâmetro de impacto são obtidas pela mensuração das dimensões dos espectadores ou participantes. O físico americano Roy Jay Glauber (1925-), premiado com o Nobel em 2005, criou em 1959 um modelo semiclássico para descrever as reações nucleares de altas energias, calcular as seções de choque totais das reações, o número de núcleons participantes, e o número das colisões binárias núcleon-núcleon, exposto a seguir.

O modelo de Glauber trata as colisões binárias, ou seja, núcleon-núcleon, como interações múltiplas: um núcleon de um núcleo incidente interage com núcleons alvos que têm uma dada densidade de distribuição. Assume-se que os núcleons

viajam em linhas retas, e não sofrem deflexões após as colisões, uma abordagem que serve de boa aproximação em energias de colisão muito elevadas. Além disso, admite-se que a seção de choque inelástica σ_{NN}^{in} da colisão núcleon-núcleon é a mesma no vácuo. Isto é, sendo semiclassico, esse modelo não considera a produção de partículas secundárias, nem a possível excitação dos núcleons. Vamos então introduzir a função de sobreposição nuclear $T_{AB}(\mathbf{b})$, cujo argumento é o vetor que tem como módulo o parâmetro de impacto b , definida da seguinte forma:

$$T_{AB}(\mathbf{b}) = \int d^2\mathbf{s} T_A(\mathbf{s}) T_B(\mathbf{s} - \mathbf{b})$$

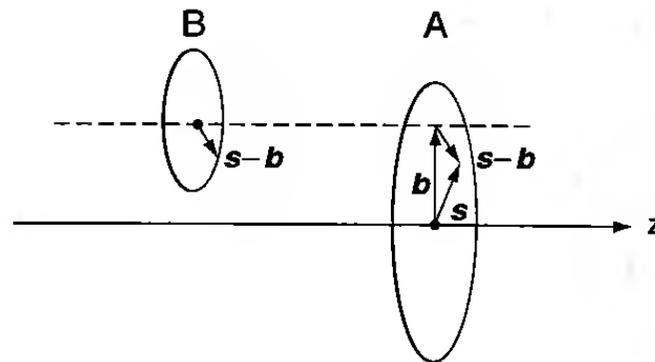
Nesta expressão, a **função de espessura**, que tem por argumento o vetor \mathbf{s} mostrado na figura abaixo, é definida como:

$$T_A(\mathbf{s}) = \int dz \rho_A(z, \mathbf{s}).$$

A variável ρ_A é densidade de número nuclear de massa, normalizada pelo número de massa A :

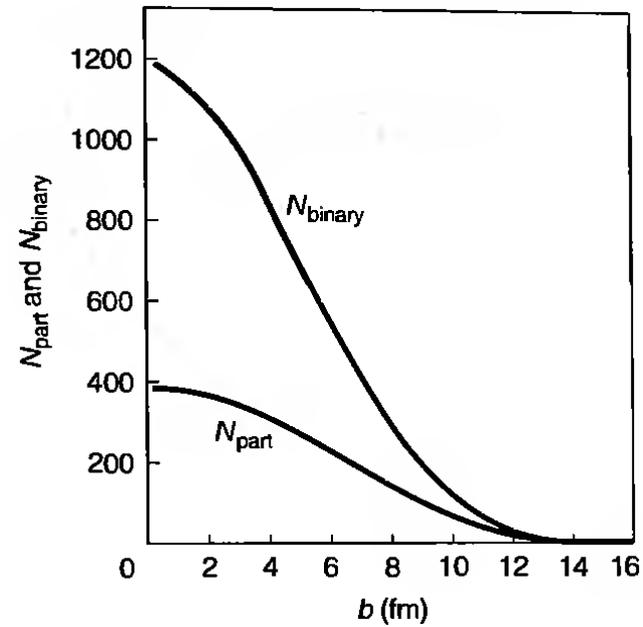
$$\int d^2\mathbf{s} T_A(\mathbf{s}) = A. \quad \int d^2\mathbf{b} T_{AB}(\mathbf{b}) = AB.$$

No caso de um núcleo esférico com raio $R_A = r_0 A^{1/3}$, temos que $T_{AA}(0) = 9A^2/8\pi R_A^2$, o que resulta, por exemplo, em $T_{AuAu}(0) = 28,4 mb^{-1}$ ($b = barn \equiv 10^{-28} m^2$, aproximadamente a área da seção reta de um núcleo de urânio), para $R_{Au} = 7,0 fm$.

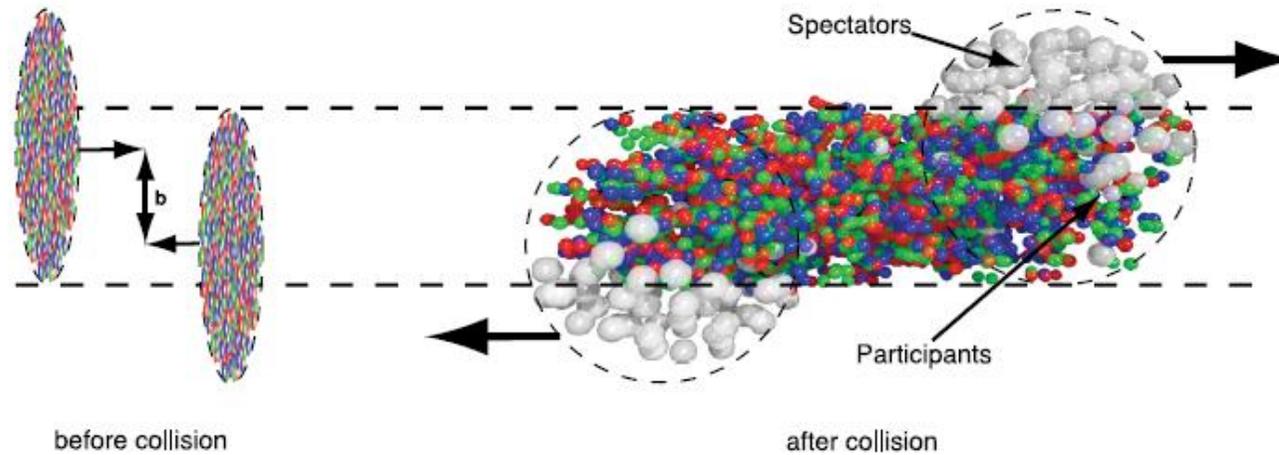


Dado um parâmetro de impacto \mathbf{b} , calcula-se o parâmetro de impacto \mathbf{s} de todos os pares de núcleons incidentes e alvos, para confirmar se eles interagiram.

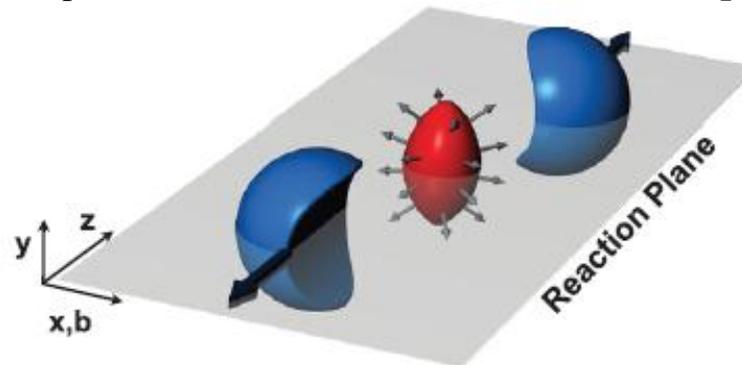
O gráfico abaixo mostra N_{bin} e N_{part} em função do parâmetro de impacto, em uma colisão $Au + Au$:



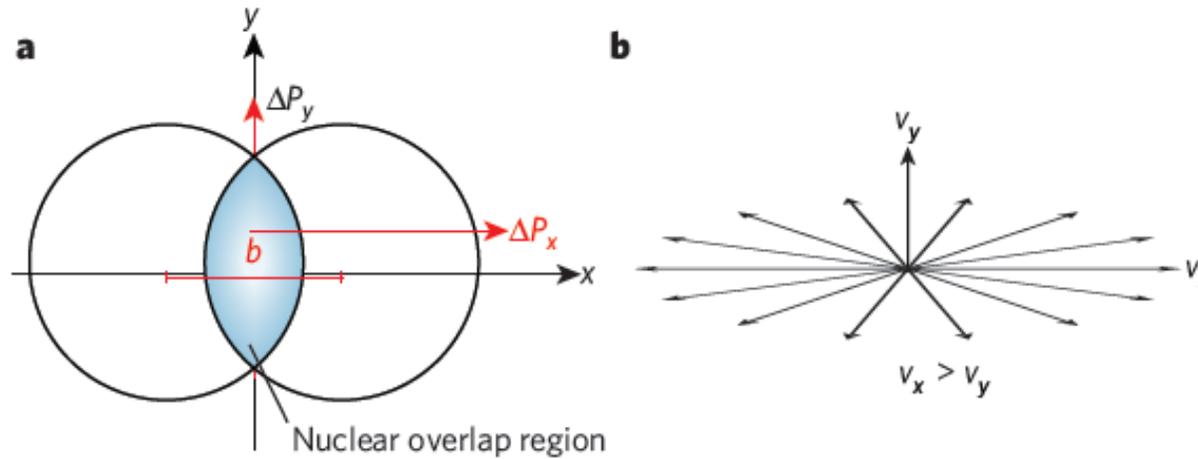
A figura abaixo mostra a visão geométrica da sequência temporal de uma colisão periférica, com parâmetro de impacto b , e os grupos de núcleons participantes e espectadores.



O mesmo tipo de colisão descentralizada pode ser ilustrado como na figura abaixo, em que a região em que o QGP é formado corresponde a um volume com geometria fusiforme característica chamada de “almôndega” (*almond-shape*), fortemente anisotrópica em relação ao **plano de reação** xz . Essa anisotropia se traduz na observação de um fluxo assimétrico dos momentos das partículas produzidas, conhecido como **fluxo anisotrópico** (*anisotropic flow*).

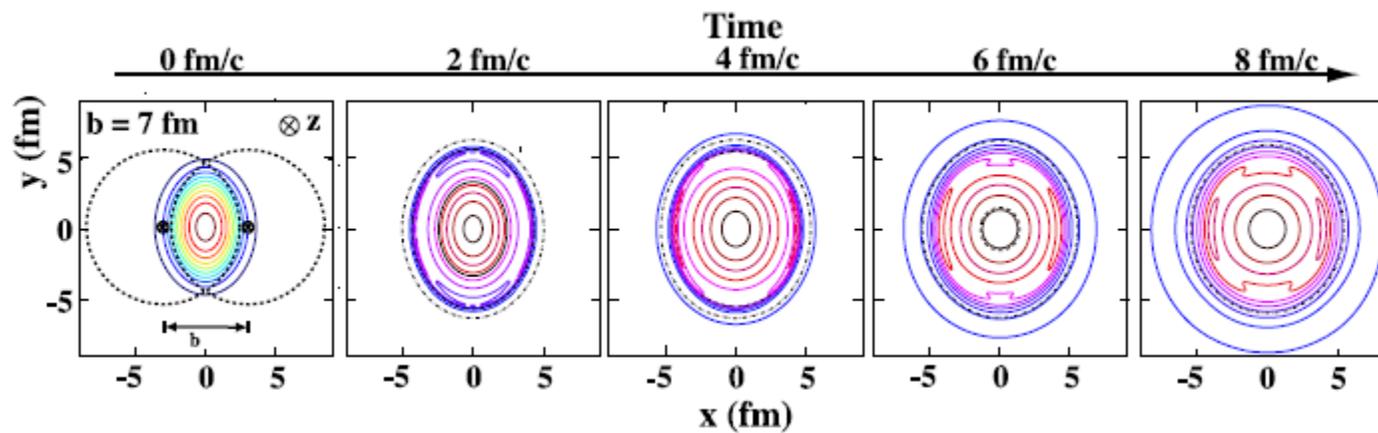


Logo no início da colisão, o gradiente de pressão é grande no plano de reação, e, após certo tempo, esse gradiente causa uma maior velocidade de expansão v_x da matéria nuclear nesta direção, como ilustra a figura (a) abaixo:



A figura (b) mostra o perfil da velocidade de expansão no plano xy , que leva a uma emissão de partículas fortemente assimétrica, com anisotropias azimutais nos momenta transversais p_t das várias partículas emitidas perpendicularmente ao eixo de colisão.

A figura seguinte, representada no espaço de coordenadas, exibe a evolução no tempo da densidade de energia transversal criada inicialmente dentro do volume em forma de almôndega, em uma colisão não central com eixo longitudinal z , entre íons pesados:



7. HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA DAS COLISÕES DE ÍONS PESADOS

A hidrodinâmica relativística permite que se construa uma visão simples da evolução no espaço-tempo da matéria aquecida ou densa produzida na região central de rapidez das colisões relativísticas núcleo-núcleo. Sem entrar em detalhes de modelos microscópicos, podemos descrever todos os estágios da expansão da matéria, a partir, por exemplo, do QGP, através de uma transição de hadronização e congelamento químico e térmico. A representação relativística de Landau e a representação ultrarrelativística de Bjorken podem ser comparadas usando-se o ferramental da hidrodinâmica relativística.

7.1. PRODUÇÃO MÚLTIPLA DE PARTÍCULAS: AS REPRESENTAÇÕES DE ENRICO FERMI E LEV LANDAU

Fermi publicou em 1950 um artigo intitulado “Eventos nucleares em altas energias”, que inaugurou um método engenhoso de aplicação da termodinâmica à produção múltipla de mésons em colisões em altas energias. O método proposto se baseava na hipótese de que, em uma colisão entre núcleons de alta energia, em razão das interações fortes, toda a energia disponível se concentraria em um pequeno volume, contraído pelo fator de Lorentz. Fermi propôs então que poderia ser usado um método estatístico para calcular as multiplicidades e o espectro das partículas produzidas. Em 1953 Landau reexaminou a ideia original de Fermi, argumentando que não se poderia esperar que o número final das partículas – mésons - emitidas dependesse apenas da condição de equilíbrio no instante da colisão. Ou seja, o sistema interage fortemente mesmo após a colisão, e o número de partículas produzidas somente se define após a interação mútua se tornar desprezível. Partindo daí, Landau criou uma generalização relativística da hidrodinâmica para descrever o estágio de expansão dessa matéria fortemente interagente. Esta generalização se fundamentou na hipótese de existência de dois estágios no processo de colisão: (i) a energia da colisão é liberada em um pequeno volume sujeito à contração de Lorentz, no interior do qual é produzido um grande número de partículas, cujo “livre caminho médio” é pequeno comparativamente às dimensões desse volume, que entra em equilíbrio estatístico; (ii) o sistema se expande, e essa expansão deve ser considerada como o movimento de um fluido perfeito, com viscosidade e condutividade térmica zero, sugerindo o uso de uma hidrodinâmica relativística, uma vez que a velocidade das partículas produzidas no sistema é comparável com a velocidade da luz. Landau supôs ainda que a interação se torna cada vez mais fraca à medida que o sistema se expande, e quando o livre caminho médio se torna comparável às dimensões lineares do sistema, ocorre um congelamento térmico, e o sistema coletivo se transforma em partículas individuais.

Se aceitarmos a hipótese do fluido perfeito de Landau, a hidrodinâmica do sistema admite apenas uma equação de estado, como, por exemplo, a relação entre pressão e densidade de energia característica da radiação de corpo negro:

$$P = \frac{1}{3}\epsilon.$$

Admitindo também que o potencial químico bariônico μ_B é desprezível quando comparado à temperatura T , obtemos as seguintes relações termodinâmicas envolvendo a densidade de entropia s :

$$Ts = \epsilon + P, \quad T ds = d\epsilon$$

Combinando as duas equações, obtemos as conhecidas relações de Stefan-Boltzmann:

$$s \propto \epsilon^{3/4}, \quad T \propto \epsilon^{1/4}.$$

Uma condição necessária para a aplicabilidade da representação de Landau a colisões relativísticas centrais núcleo-núcleo é que os núcleons na região frontal de cada um dos núcleos em colisão percam a totalidade de sua energia cinética, calculada no referencial c.m., quando atravessam o outro núcleo. Isto requer que a perda média de energia desses R núcleons por unidade de comprimento seja maior do que o valor crítico dado por:

$$\left(\frac{dE}{dz}\right)_{\text{cr}} = \frac{E_{\text{cm}}/2}{(2R/\gamma_{\text{cm}})} \simeq 2 \left(\frac{E_{\text{cm}}}{10 \text{ GeV}}\right)^2 \text{ GeV fm}^{-1}$$

Foi utilizado aqui o valor $R = 7 \text{ fm}$, que corresponde ao raio do núcleo do átomo de ouro, usado no RHIC. Esse valor é muito superior ao considerarmos energias ultrarrelativísticas da ordem de $E_{\text{cm}} \sim 200 \text{ GeV}$, atingíveis no RHIC.

Concluimos daí que a representação de Landau neste caso não se aplica, uma vez que a potência de frenagem nuclear correspondente é muito acima do observado. Além disso, em contraste com as abordagens de Fermi e Landau, a espessura dos núcleos em colisão não pode ser infinitamente pequena no regime ultrarrelativístico, devido à presença dos mini-pártons. Veremos a seguir como a representação de Bjorken é uma cura para esses problemas.

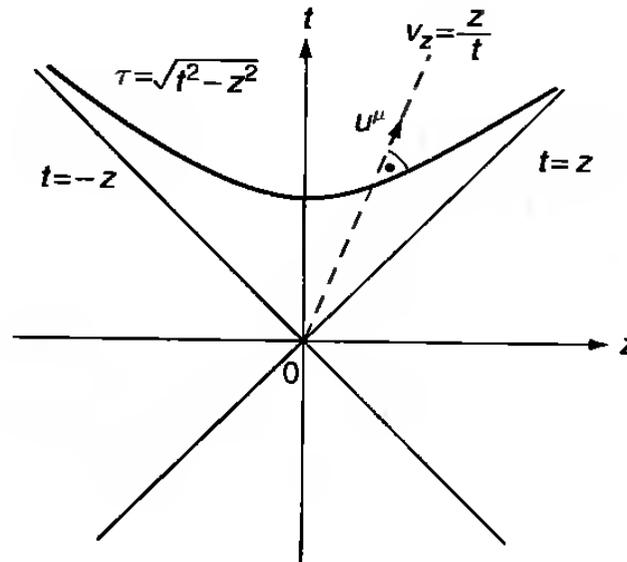
7.2. A ESCALA E O FLUXO DE BJORKEN

Como já foi citado, devida à existência da cascata interior-exterior, os quanta produzidos nas colisões ultrarrelativísticas entre íons pesados se materializam em regiões afastadas do alvo. Concretamente, o volume da reação é expandido acentuadamente na direção longitudinal do eixo z do feixe incidente, como já mostrado em várias figuras anteriores. Em primeira aproximação, é razoável desprezar a dimensão espacial transversal do plano xy , e descrever a reação nas dimensões espaço-temporais 1+1, z e t . Será mais simples, em termos de notação e compreensão, passar do sistema cartesiano (t, z) para o sistema (τ, Y) , onde τ é o tempo próprio e Y a rapidez no espaço-tempo:

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}, \quad Y = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z},$$

$$t = \tau \cosh Y, \quad z = \tau \sinh Y.$$

A definição das novas coordenadas é mostrada na figura abaixo:



Considerando o fluxo hidrodinâmico em 1+1 dimensões, supõe-se que as grandezas termodinâmicas e a velocidade do fluxo sejam funções apenas de τ e de Y . Para direções transversais ao eixo de colisão z , é conveniente escolher o seguinte sistema de coordenadas:

$$x^\mu = (t, x, y, z) = (\tau \cosh Y, r \cos \phi, r \sin \phi, \tau \sinh Y),$$

$$d^4x = dt dx dy dz = \tau d\tau dY r dr d\phi.$$

7.2.1. FLUIDO PERFEITO

Vamos assumir agora que a termalização local da matéria com pequeno livre caminho médio se realiza em um particular estágio inicial da colisão, o que nos permite usar a hidrodinâmica relativística para um fluido perfeito. Construimos então um *ansatz* de forma tal que a velocidade local $u^\mu(x)$ desse fluido perfeito tenha a mesma forma que a corrente livre de partículas partindo da origem, como indica a linha tracejada na figura acima. Fazendo $v_z = z/t$, temos que:

$$u^\mu = \gamma(1, 0, 0, v_z)$$

$$\rightarrow (t/\tau, 0, 0, z/\tau) = (\cosh Y, 0, 0, \sinh Y)$$

Este é o chamado **fluxo de escala**, ou **fluxo de Bjorken**. Substituindo esta velocidade na versão relativística da equação de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1 - v^2}{\varepsilon + P} \left[\nabla P + \mathbf{v} \frac{\partial P}{\partial t} \right]$$

o lado esquerdo da equação se anula automaticamente, e obtemos:

$$\frac{\partial P(\tau, Y)}{\partial Y} = 0.$$

Para este resultado, usamos a seguinte lei de transformação:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh Y & -\sinh Y \\ -\sinh Y & \cosh Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \\ \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial Y} \end{pmatrix}.$$

Essa forma particular da equação de Euler implica que a pressão não depende da rapidez espaço-temporal, e, portanto, é constante sobre a hipérbole da figura anterior. Uma vez que a rapidez Y se transforma como $Y \rightarrow Y - \tanh^{-1} v_{boost}$ sob a transformação de Lorentz, isso também implica que a pressão P é invariante em relação a um boost.

As soluções das equações hidrodinâmicas para o fluxo de Bjorken são dadas por:

$$\begin{aligned} s(\tau) &= s_0 \frac{\tau_0}{\tau}, \\ \varepsilon(\tau) &= \varepsilon_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1+\lambda}, \\ T(\tau) &= T_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^\lambda, \end{aligned}$$

onde s_0 , ε_0 e T_0 são os valores no tempo inicial τ_0 . Consideremos agora uma região do fluido com espessura longitudinal

$$\delta z = t \delta v_z,$$

e contida entre duas linhas de corrente de forma tal que

$$\begin{aligned} |z| &\leq t \frac{\delta v_z}{2}, \\ \delta v_z &\ll 1. \end{aligned}$$

O volume ocupado por esse elemento de fluido será dado por

$$\delta V = \pi R^2 \cdot t \cdot \delta v_z,$$

onde πR^2 é a área transversal do núcleo. Portanto, a entropia total contida nesse volume em expansão é dada por:

$$\delta S = s\delta V = \pi R^2 \cdot st \cdot \delta v_z = \pi R^2 \cdot s_0 t_0 \cdot \delta v_z,$$

onde foi usada a aproximação $\tau \approx t$ para $z \approx 0$ e a solução hidrodinâmica acima para a densidade de entropia. Concluímos que, uma vez que o lado direito desta equação é independente do tempo, a entropia total no elemento de fluido em expansão é uma constante de movimento, ou seja, trata-se de uma expansão adiabática.

Usando agora a solução hidrodinâmica para a densidade de energia interna, o volume δV terá a energia:

$$\delta E = \varepsilon \delta V = \pi R^2 \cdot \varepsilon_0 t_0 \cdot \delta v_z \left(\frac{t_0}{t} \right)^\lambda.$$

Isto implica que a energia interna contida no elemento de fluido em expansão não é conservada: a parcela que falta dessa energia interna foi convertida na energia do fluxo longitudinal das células adjacentes do fluido, através da pressão exercida durante a expansão do fluido:

$$\frac{d(\tau\varepsilon)}{d\tau} = -P.$$

Como um fluido perfeito tem viscosidade zero, nenhuma fração da energia do fluxo é convertida em energia térmica.

Concluindo a apresentação dos vários modelos fenomenológicos e teorias efetivas sobre a formação do QGP, duas observações devem ser feitas. Em primeiro lugar, a hidrodinâmica não pode sugerir quais valores das condições iniciais devemos usar, como o tempo inicial τ_0 quando a termalização local é atingida, e o perfil espacial da temperatura e do potencial químico bariônico nesse mesmo tempo τ_0 . Em virtude disso, esses parâmetros são usualmente ajustados para satisfazerem os valores encontrados experimentalmente para os observáveis. Uma abordagem mais fundamental permitiria calcular essas condições iniciais a partir de teorias microscópicas, sem a hipótese macroscópica do equilíbrio térmico. Existem alguns modelos que se propõem a isso, como os modelos de cascata de párons, de corda de cor, e de condensado de

vidro colorido (*color glass condensate* – *CGC*). A segunda observação se refere ao aprofundamento dos estudos sobre o efeito de expansão transversal do QGP, caracterizado como **fluxo elíptico**, já previsto pela teoria, e que vem sendo confirmado experimentalmente, tanto no RHIC quanto no LHC.

Encerraremos esta apresentação analisando mais de perto os conceitos e experimentos pertinentes a essas duas observações, assim como alguns resultados recentes obtidos sobre o QGP no contexto da dinâmica de frente de onda (LFD) definida por Dirac em 1949.

8. FORMAÇÃO E EVOLUÇÃO DO QGP

Como já foi visto, a formação do QGP nas colisões ultrarrelativísticas entre íons pesados inicia com a produção de um grande número de pártons (quarks e glúons) e/ou na desexcitação do campo clássico suave próprio ao estágio inicial. O sistema resultante de muitos pártons passa por uma evolução no espaço-tempo até sofrer eventualmente a transição para um sistema composto por hádrons. A descrição dessa evolução até conectá-la aos observáveis experimentais pode ser feita com o uso da hidrodinâmica relativística, assumindo o equilíbrio local do sistema, ou, alternativamente, usando o modelo de transporte relativístico quântico, adaptado para um sistema não abeliano de quarks e glúons, usando a expansão semiclássica da função de Wigner, da equação de transporte e do teorema H de Boltzmann, e acrescentando-se termos de colisão.

Supondo o equilíbrio térmico do QGP, a temperatura inicial T_0 obtida no RHIC e no LHC é mais alta do que a temperatura crítica $T_c \sim 170\text{MeV}$ da transição de fase da QCD.

Quando o QGP esfria até atingir T_c , inicia-se a hadronização, e tem lugar uma drástica diminuição da densidade de entropia, pois os graus de liberdade de cor no sistema hadrônico são confinados como graus de liberdade latentes. O gás hadrônico assim produzido continua a se expandir e resfriar até resultar um congelamento químico e térmico, quando o livre caminho médio dos hádrons excede as dimensões espaço-temporais do sistema. A equação de estado do sistema se reflete na superimposição da expansão e do fluxo transversais sobre a expansão longitudinal. Uma das consequências observáveis do fluxo transversal coletivo é um desvio para o azul do espectro de momentum transversal dos hádrons emitidos no estágio de congelamento.

Os experimentos mais energéticos em andamento incluem a colaboração STAR no RHIC, que analisa colisões Au+Au ($A=197$) com $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{GeV}/A$; e o experimento ALICE no LHC, que produz colisões Pb+Pb ($A=208$) com $\sqrt{s_{NN}} = 2,76\text{TeV}/A$ até o momento, podendo chegar a partir de 2014 ao máximo de $\sqrt{s_{NN}} = 5,52\text{TeV}/A$.

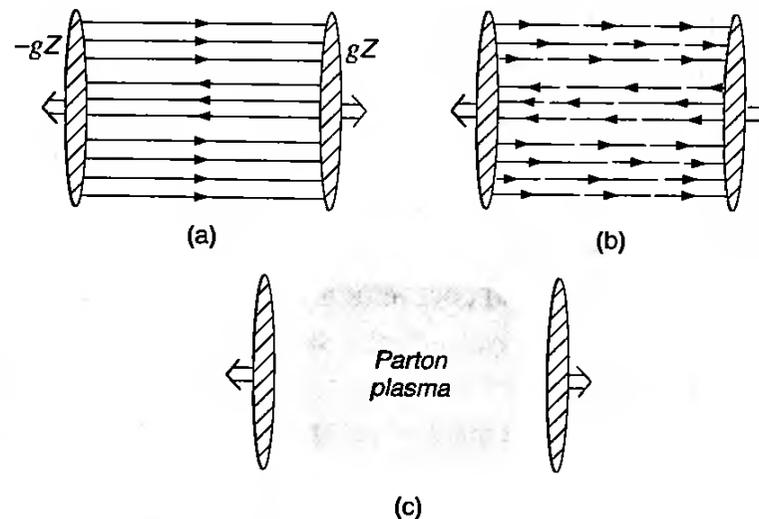
8.1. A CONDIÇÃO INICIAL

A produção de pártons após o impacto entre íons pesados propicia uma condição inicial crucial para o desenvolvimento subsequente do plasma de pártons. Entretanto, seu mecanismo ainda não é bem entendido, e está sendo atualmente estudado de forma intensiva, dos pontos de vistas teóricos e experimentais. Os modelos apresentados a seguir são alguns dos candidatos à descrição completa desse estágio inicial de pré-equilíbrio.

8.1.1 MODELO DE QUEBRA DA CORDA COLORIDA

Este modelo pode ser resumido da seguinte maneira:

(i) dois núcleos colidem e se atravessam mutuamente. Os núcleons atingidos internamente aos íons são excitados pela cor, se tornando fontes de fios e cordas de cor entre os dois núcleos. Assume-se que a corda colorida seja um campo de cor clássico e coerente. Uma carga de cor média $\pm Z$ se acumula em cada núcleo, por força da troca de múltiplos glúons durante a colisão (a). As cordas decaem produzindo pares $q\bar{q}$ de quarks e g^2 de glúons pelo mecanismo de Schwinger (b). A interação mútua dos pártons produzidos resulta na formação do QGP (c).



(ii) devido ao mecanismo de Schwinger, introduzido na QED em 1951, formam-se pares $q\bar{q}$ e gg , sob a influência do forte campo elétrico de cor estabelecido entre os núcleos. Em outros termos, o estado coerente, mas fortemente excitado, formado em (a) decai pela emissão espontânea de quanta de cor, os pártons. A taxa geral de criação de pares por volume unitário de espaço-tempo é dado por:

$$w(\sigma) = -\frac{\sigma}{4\pi^2} \int_0^\infty dp_\tau^2 \ln [1 \mp \exp(-\pi p_\tau^2/\sigma)]$$

O sinal negativo corresponde à taxa de criação de um par de férmions de massa nula e spin $1/2$; o sinal positivo, de um par de bósons de massa nula e spin 1; p_τ é o momento transverso do férmion ou do bóson, perpendicular ao campo uniforme de fundo; σ caracteriza a intensidade do campo externo, e é dado na QED por $\sigma = eE$ para um campo elétrico uniforme. Na QCD, $\sigma \sim gE_c$, onde E_c é o campo de cor em uma dada orientação espacial e de cor (por exemplo, a terceira direção espacial e a terceira direção de cor). Considerando o número de graus de liberdade em sabor e cor, as taxas totais de emissão para quarks e glúons podem ser estimadas pela expressão:

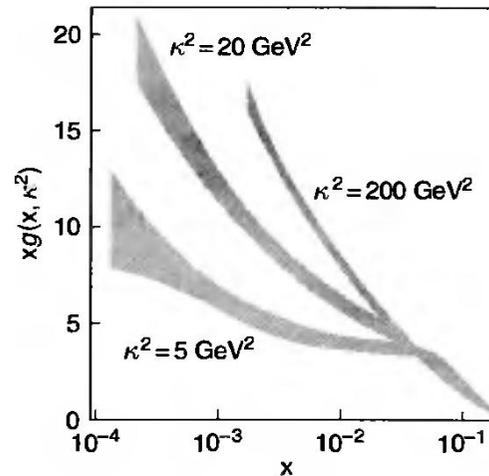
$$w_q(\sigma \sim gE_c) \sim N_f \frac{(gE_c)^2}{24\pi}, \quad w_g(\sigma \sim gE_c) \sim N_c \frac{(gE_c)^2}{48\pi}$$

Observa-se que a magnitude de ambas é comparável, isto é, $w_g/w_q \sim N_c/2N_f$. Para colisões relativísticas de íons pesados, a magnitude de σ também pode ser calculada como $\sigma \sim KZ$, onde K é a tensão na corda e gZ é uma carga “efetiva” de cor acumulada nos núcleos após a colisão (a).

(iii) e, finalmente, espera-se que o QGP em equilíbrio térmico seja produzido através da interação mútua entre os quarks e glúons recém-formados. Um ponto de partida para a descrição desse estado pode ser, por exemplo, a equação de Boltzmann para quarks e glúons, acoplada ao campo clássico coerente de fundo.

8.1.2 O CONDENSADO DE VIDRO COLORIDO (CGC)

Já vimos que pártons com pequena fração do momentum longitudinal do núcleon, isto é, com pequeno x de Bjorken, têm um papel importante na região central das colisões ultrarrelativística entre íons pesados. Em particular, a fração de momentum do glúon em um próton, $xg(x, Q^2)$, que pode ser medida em experimentos de espalhamento inelástico profundo lépton-próton, domina as contribuições dos quarks de valência e mini-quarks para baixo x . E mais, $xg(x, Q^2)$ cresce muito rapidamente para $x < 10^{-2}$ e alto valor de Q^2 , conforme ilustra a figura abaixo.

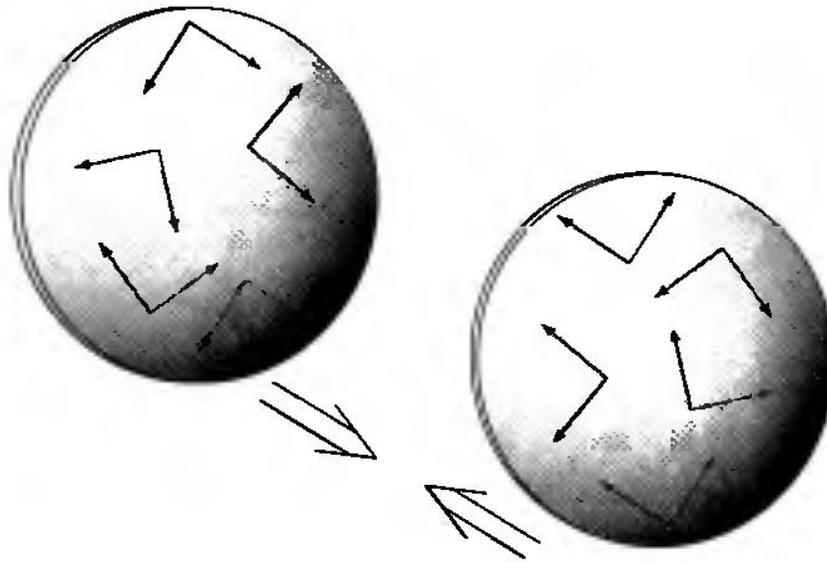


Pártons com tamanho transversal típico de $1/Q$ eventualmente se sobrepõem, interagem entre si e atingem a saturação. Em outras palavras, esses glúons formam uma configuração de campo clássico coerente chamada de **condensado de vidro colorido** (CGC). A escala de saturação é definida de forma autoconsistente, para um hádron de raio R , como:

$$Q_s^2 \sim \alpha_s(Q_s^2) \frac{xg(x, Q_s^2)}{\pi R^2}$$

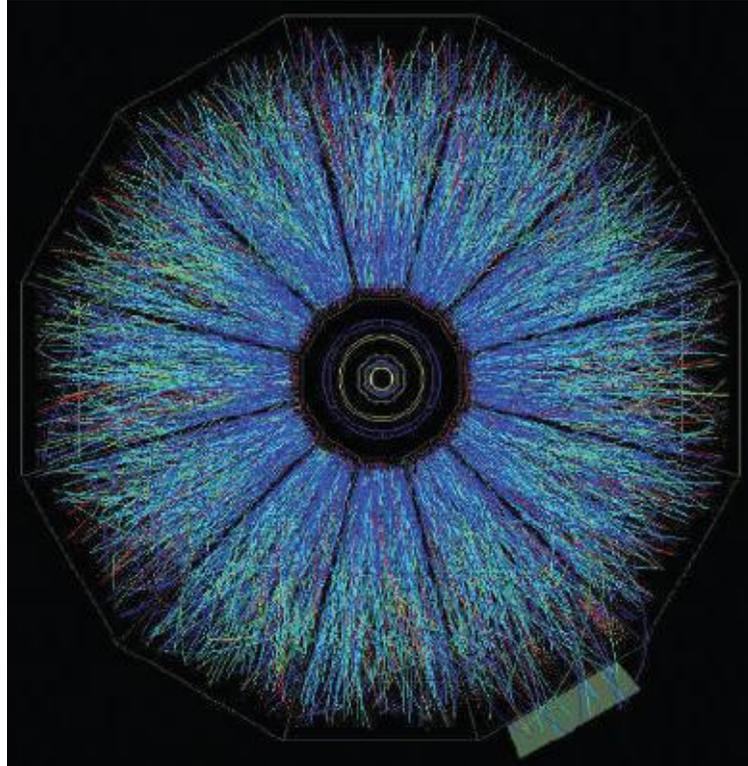
No caso de um núcleo, $g(x, Q^2)$ deve ser substituído pela distribuição de glúons em um núcleo, $g_A(x, Q^2) \sim Ag(x, Q^2)$, e R pelo raio do núcleo, $R_A = r_0 A^{1/3}$. Logo, Q^2 cresce como $A^{1/3}$, e deste modo a saturação dos glúons é mais facilmente observada em núcleos pesados do que em prótons.

No modelo CGC, as colisões ultrarrelativísticas núcleo-núcleo são descritas como o desenvolvimento no tempo do campo clássico suave criado por pártons movendo-se rapidamente e orientados aleatoriamente no espaço de cor, como ilustrado abaixo. Embora esse modelo descreva o estado inicial imediatamente antes e depois da colisão, deixa em aberto a questão de como se dá a descoerência do campo clássico ao produzir o plasma de pártons.



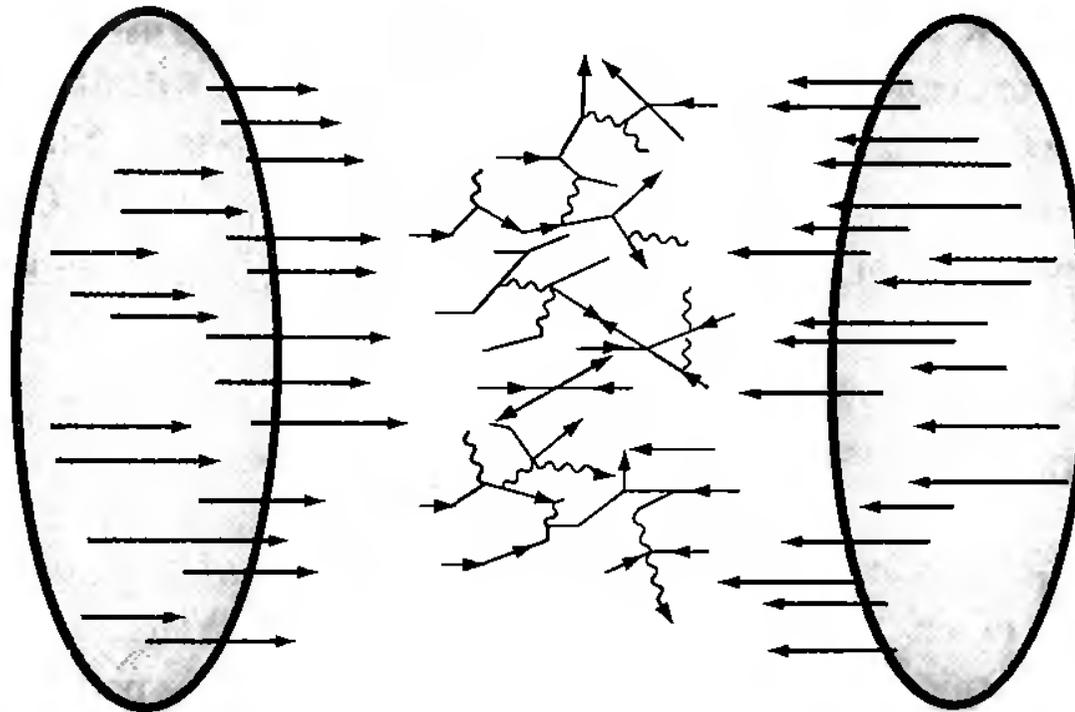
8.1.3 MODELOS EM pQCD

Nas colisões AA em altas energias, espalhamentos profundos de pártons “duros” no estágio inicial podem resultar em uma grande quantidade de produção de jatos, como na imagem abaixo, de uma colisão central Au+Au no RHIC.



Em particular, os múltiplos minijatos, cujo momentum transversal típico é de alguns GeV, podem dar origem a uma fração importante da energia transversal produzida nas colisões entre íons pesados no RHIC e no LHC. Ou seja, esses minijatos podem ser bons candidatos a sementes iniciais do QGP. A produção de minijatos em colisões A+A pode ser estimada por modelos baseados nos geradores de eventos pelo método de Monte Carlo.

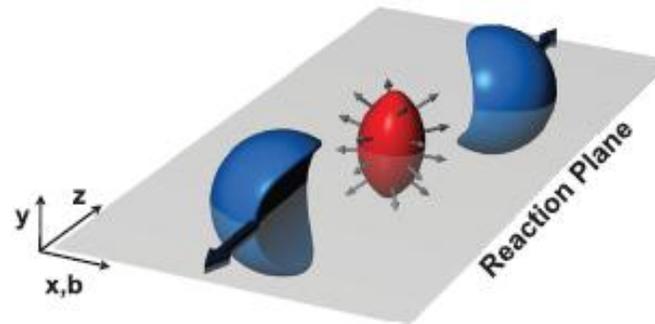
Um desses modelos é o PCM (Parton Cascade Model), que resolve a equação de Boltzmann semiclássica adaptada ao transporte quântico, com o termo de espalhamento párton-pártom dado pela pQCD. As distribuições de pártoms dos núcleos incidentes são calculadas a partir das funções de estrutura experimentais do núcleon, com a possibilidade de modificação nuclear dessas distribuições (*nuclear shadowing*). Uma vez que a pQCD é aplicável, no máximo, para processos semiduros com $p_T > p_0 \sim 1-2\text{GeV}$, existe sempre uma incerteza na escala, originada por p_0 , que deve ser calibrada pelos dados experimentais. A figura abaixo mostra esquematicamente cascatas de pártoms em uma colisão ultrarrelativística núcleo-núcleo.



8.2. O FLUXO ELÍPTICO: DEFINIÇÃO E ALGUNS RESULTADOS RECENTES

O fluxo assinala a presença de interações múltiplas entre os constituintes do meio criado na colisão. Um número crescente de colisões leva usualmente a um incremento no fluxo, e conduz o sistema para mais próximo da termalização. A intensidade do fluxo, portanto, é um indicador detalhado do nível de termalização.

Experimentalmente, a evidência mais direta desse processo vem do fluxo anisotrópico, que, como já vimos, reflete a anisotropia das distribuições de momentos das partículas, uma vez correlacionadas com o plano de reação. O plano de reação é definido pelo parâmetro de impacto e pela direção do feixe incidente, conforma ilustra a figura abaixo, já exibida anteriormente.



Um método eficiente e conveniente de caracterizar os vários padrões do fluxo anisotrópico é expandir em séries de Fourier as distribuições diferenciais invariantes triplas:

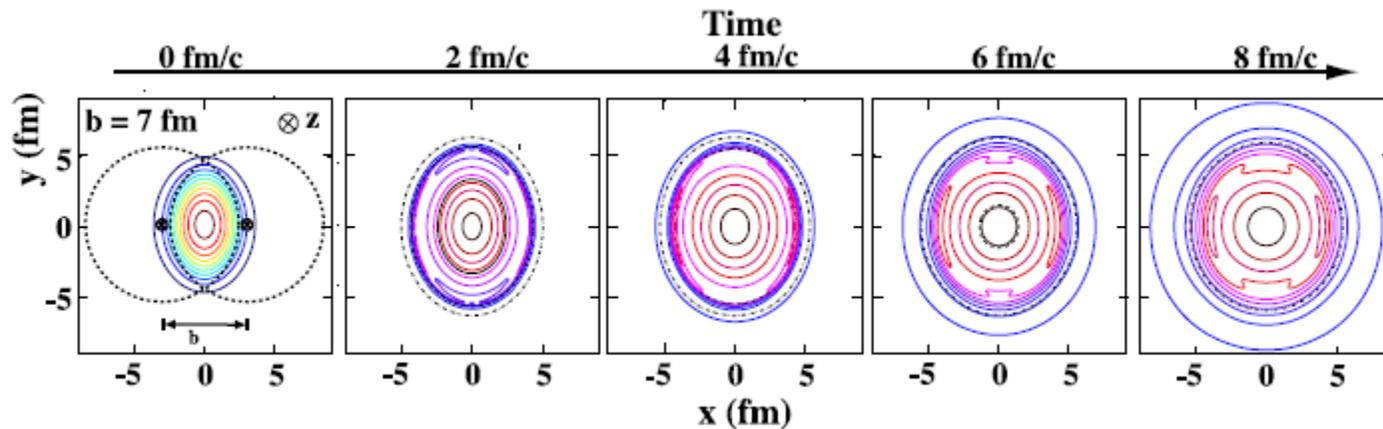
$$E \frac{d^3 N}{d^3 \mathbf{p}} = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 N}{p_t d p_t dy} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos[n(\varphi - \Psi_{RP})] \right)$$

Nesta expressão, E é a energia da partícula, p é o momentum, p_t é o momentum transversal, φ o ângulo azimutal, y a rapidez e Ψ_{RP} é o ângulo do plano de reação. Os termos senoidais dessa expansão são nulos, devido à simetria de reflexão em relação ao plano de reação. Os coeficientes generalizados de Fourier dependem de p_t e de y , e são dados pela equação:

$$v_n(p_t, y) = \langle \cos[n(\varphi - \Psi_{RP})] \rangle$$

Os colchetes angulares (*brackets*), como de hábito, indicam que foi tomada uma média sobre as partículas, somando sobre todos os eventos binários (p_t, y) considerados. Nessa decomposição de Fourier, os coeficientes v_1 e v_2 , são chamados, respectivamente, de fluxo dirigido e fluxo elíptico.

A região dos participantes, inicialmente no formato assimétrico de um “quibe”, evolui no tempo, ao mesmo tempo em que esfria, através de uma expansão governada pela velocidade do som c_s no meio, tendendo progressivamente a uma forma simétrica:

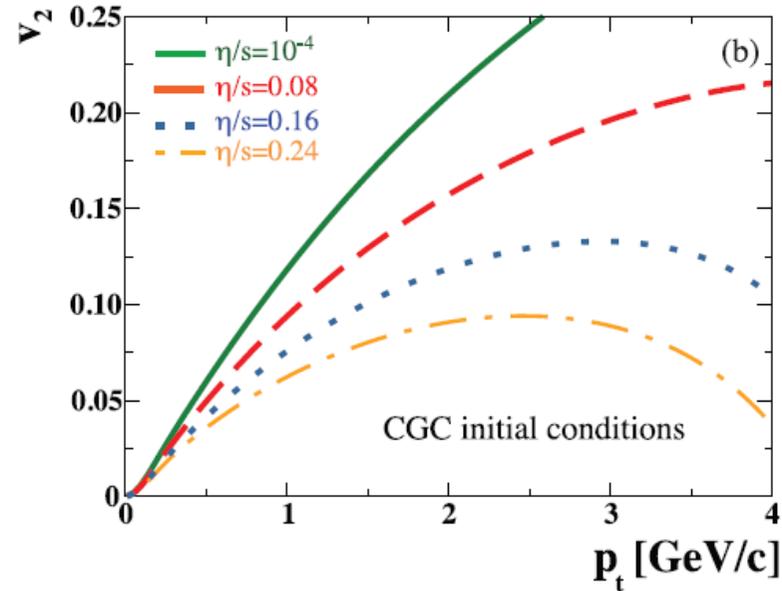


Uma vez que as possíveis equações de estado (EoS) do QGP formado nessa região são todas tentativas, as medidas experimentais de $v_2(p_t)$, para várias espécies de partículas colisoras, alimentam um excelente método de se obter as restrições à(s) EoS capaz(es), especialmente sob o enfoque da hidrodinâmica relativística de um gás ideal, de descrever o QGP real.

Recentemente, detectou-se que pequenos desvios inseridos nas EoS da hidrodinâmica ideal, particularmente correções de viscosidade, alteram significativamente a produção do fluxo elíptico. A grandeza mais adequada para mensurar a viscosidade dos fluidos relativísticos é a razão entre a viscosidade e a densidade de entropia η/s .

Verifica-se experimentalmente que bons fluidos relativísticos são os que possuem $\eta/s \sim \hbar/k_B$. Usando a dualidade calibre-gravidade proposta na correspondência AdS/CFT, Kovtun, Son e Starinets sugeriram em 2005 que, para todos os fluidos, $\eta/s \geq \hbar/4\pi k_B$ (condição KSS). Por isso, em unidades naturais $\hbar = k_B = 1$, dizemos que um fluido que apresenta a relação $\eta/s = 1/4\pi$ é um fluido perfeito. A condição KSS levanta a interessante questão de o quanto esse valor é fundamental na natureza, e se o QGP se comporta como um fluido perfeito. Argumenta-se que a transição de hádrons para quarks e glúons se dá na vizinhança de um valor mínimo de η/s , do mesmo modo que ocorre com as transições de fase do hélio, do nitrogênio e da água. Uma medida acurada desse valor mínimo de η/s do QGP poderia, por exemplo, estabelecer com precisão o ponto crítico da transição.

Experimentalmente, podemos obter a resposta para a magnitude de η/s medindo o fluxo elíptico v_2 , como mostra o gráfico abaixo.

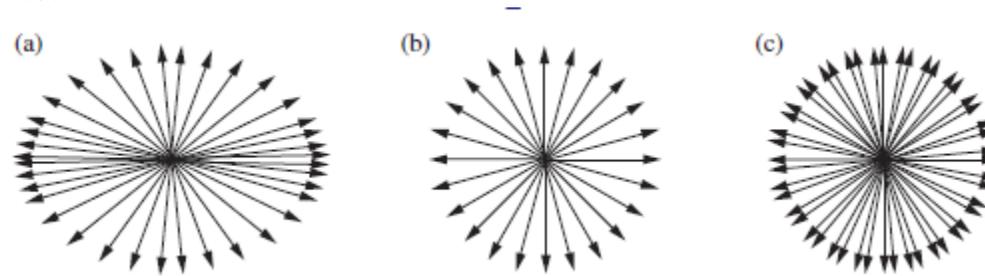


A linha cheia é próxima à hidrodinâmica ideal ($\eta/s \sim 0$), enquanto que as outras três linhas correspondem aos valores de η/s até três vezes a condição KSS. Valores diferentes de η/s levam a valores significativamente diversos de v_2 e modifica a sua dependência de p_t . Entretanto, os valores de v_2 e sua dependência de p_t não dependem somente de η/s , mas também da EoS utilizada.

Outra forte dependência do fluxo elíptico v_2 é em relação à anisotropia espacial, particularmente, à excentricidade espacial inicial

$$\varepsilon = \frac{\langle y^2 - x^2 \rangle}{\langle y^2 + x^2 \rangle},$$

conforme ilustra a figura abaixo:



Por outro lado, uma vez que atualmente a excentricidade não pode ser medida de forma independente de outros parâmetros, isto leva a uma grande incerteza na medição do valor de η/s .

8.2.1. O LÍQUIDO PERFEITO

O grande fluxo elíptico observado no RHIC fornece uma evidência sedutora de detecção de matéria fortemente interagente, que parece se comportar como um **líquido perfeito**. Para quantificar essa afirmação, as correções viscosas significativas precisam ser calculadas. Usando variados modelos, a razão η/s foi estimada em $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{GeV}$, a energia do RHIC, e seu valor encontrado foi inferior a cinco vezes a condição KSS. Considerando o valor de η/s constante durante toda a evolução do QGP, os dados do RHIC foram melhor descritos com uma viscosidade η/s igual ao dobro da condição KSS. Sabemos de outros fluidos, porém, que η/s depende da temperatura. Portanto, para a quantificação completa de η/s do fluido partônico é necessário conhecer sua dependência da temperatura e também conhecer as contribuições relativas das fases partônica e hadrônica à dinâmica do QGP. Espera-se que o experimento ALICE no LHC, por ter a possibilidade de elevar a energia atual $\sqrt{s_{NN}} = 2,76\text{GeV}/A$ até $\sqrt{s_{NN}} = 5,52\text{GeV}/A$ no referencial de c.m., possa diminuir consideravelmente as incertezas hoje existentes na medida do fluxo elíptico, quanto a: (i) as contribuições relativas das fases partônica e hadrônica; (ii) a excentricidade espacial inicial, e (iii) a dependência de η/s com a temperatura. Da mesma forma que a identificação, no

LHC, dos outros harmônicos do fluxo anisotrópico v_3, v_4, v_5 nas colisões nucleares ultrarrelativísticas enriquecerá o nosso conhecimento das colisões nucleares ultrarrelativísticas.

Um dado atual que estimula essa visão é que, no ALICE, já se observou que a produção do fluxo elíptico aumentou 50% em relação aos resultados do RHIC. E o fluxo elíptico é exatamente um dos observáveis com maior riqueza de informações no estudo das colisões de íons pesados.

INTRODUÇÃO À HIDRODINÂMICA ULTRARRELATIVÍSTICA DAS COLISÕES ENTRE ÍONS PESADOS

HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA ESPECIAL

1. INTRODUÇÃO

O uso da hidrodinâmica relativística no contexto da física de altas energias data de 1953, inaugurado pelo físico russo Lev Landau. Portanto, mais de vinte anos antes da QCD ser descoberta. As colisões em altas energias produzem muitos hádrons de diferentes espécies, que se projetam em todas as direções. Poder-se-ia esperar que as ferramentas da física estatística pudessem lançar alguma luz nessa complexidade. Porém, a luz se fez a partir do espalhamento inelástico profundo (DIS – *deep-inelastic scattering*) que eventualmente originou o modelo dos pártons, criado em 1969 por Richard Feynman. Neste cenário, a hidrodinâmica seria de pouca ou nenhuma serventia, uma vez que o modelo tratava de colisões entre partículas individuais e sem estrutura (elétrons e quarks), em eventos desprovidos de comportamento coletivo. Foi recentemente, a partir de 2000, com o início de uma bateria de experimentos de colisões entre feixes colimados de íons pesados de ouro ($^{197}_{79}\text{Au}$) no RHIC (*Relativistic Heavy Ion Collider*), em Brookhaven, Long Island, NY, que ressurgiu o interesse na hidrodinâmica relativística. Um dos primeiros artigos científicos resultantes reportou em 2001 a “observação de um grau maior de termalização do que o detectado a energias mais baixas de colisão”. Uma série de fenômenos observados sugeria que a matéria produzida por estas colisões se comportava coletivamente, como um fluido. Em 2005 foi mesmo anunciado que os experimentos no RHIC haviam criado um “fluido perfeito”, com a menor viscosidade possível, ou nenhuma viscosidade.

A hidrodinâmica relativística é especialmente interessante por ser simples e geral a um só tempo. Simples porque a informação sobre o sistema está contida nas propriedades termodinâmicas, isto é na sua equação de estado. E geral, no sentido de que repousa em uma única hipótese – infelizmente, muito inflexível -, o equilíbrio termodinâmico local. Nenhuma outra hipótese precisa ser feita sobre a natureza das partículas e dos campos, suas interações, ou sobre a natureza clássica/ quântica dos fenômenos envolvidos.

Abaixo, uma fotografia aérea do complexo de Brookhaven, com o RHIC ao fundo.



2. TERMODINÂMICA

Vamos rever agora algumas das identidades padrão da termodinâmica e da física estatística que são usadas com frequência em modelos hidrodinâmicos.

2.1. IDENTIDADES GENÉRICAS

A diferencial da energia interna é dada pela identidade termodinâmica:

$$dU = -PdV + TdS + \mu dN,$$

onde P é a pressão, V é o volume, S é a entropia, T a temperatura, μ o potencial químico. Em sistemas não relativísticos, N simboliza, em geral, o número de partículas, que sempre é conservado. Em um sistema relativístico, esse número não é conservado: é sempre possível a criação, se a energia necessária estiver presente, um par partícula-antipartícula, como prevê a equação de Dirac. Neste caso, N representa outra quantidade que efetivamente é conservada, uma das quais é o número bariônico. Se existem várias quantidades N_i conservadas, basta substituir o termo μdN por $\sum_i \mu_i dN_i$. Por simplicidade,

usaremos apenas o número bariônico N e o potencial químico bariônico μ . A segunda maior diferença na termodinâmica dos sistemas relativísticos é que a energia de massa mc^2 é incluída na energia interna, não esquecendo que a massa relativística m de uma partícula varia com a sua velocidade.

Os dois primeiros termos do lado direito da equação acima são interpretados imediatamente como o trabalho elementar e o calor elementar, respectivamente, transferidos ao sistema. A simplicidade matemática do terceiro termo, porém, mascara a complexidade de sua interpretação em termos físicos.

A energia é uma função extensiva das variáveis extensivas V, S, N , o que se traduz na equação fundamental:

$$U(\lambda V, \lambda S, \lambda N) = \lambda U(V, S, N).$$

Diferenciando esta equação fundamental em relação a λ e fazendo $\lambda = 1$, obtemos:

$$U = -PV + TS + \mu N.$$

Diferenciando agora esta equação e aplicando o resultado na equação diferencial anterior, obtemos a conhecida relação de Gibbs-Duhem:

$$VdP = SdT + Nd\mu$$

Na hidrodinâmica, as grandezas que entram nas equações não são exatamente a energia total, a entropia e o número bariônico, mas suas **densidades por volume unitário**: a densidade de energia $\epsilon \equiv U/V$, a densidade de entropia $s \equiv S/V$ e a densidade bariônica $n \equiv N/V$. Todas essas grandezas, portanto, são **intensivas**. As equações intensivas correspondentes às anteriores serão, portanto:

$$\begin{aligned}\epsilon &= -P + Ts + \mu n. \\ dP &= sdT + nd\mu. \\ d\epsilon &= Tds + \mu dn.\end{aligned}$$

2.2. FLUIDO BARIÔNICO

Se a densidade bariônica n é nula no interior do fluido, os termos correspondentes desaparecem das equações diferenciais intensivas acima. O mesmo vale se o potencial químico μ é nulo dentro do fluido. Isto mostra que dizer que “a densidade bariônica não se conserva” é o mesmo que “o número bariônico não se conserva”. Neste caso, o fluido possui somente um grau de liberdade intensivo.

O fluido produzido em uma colisão entre íons pesados tem três cargas conservadas, dadas pelo número efetivo de quarks, isto é, a diferença entre o número de quarks e o de antiquarks, de cada sabor u, d, s . Note-se que sempre há um excesso de quarks u e d em relação aos seus antiquarks, devido aos núcleos incidentes, compostos de prótons e nêutrons, por sua vez compostos de quarks u e d . Entretanto, nas energias ultrarrelativísticas esse excesso termina sendo pequeno, devido ao fato de que as partículas produzidas nos jatos provenientes do desconfinamento virtual de quarks e glúons que ocorre após a colisão superam em várias ordens de grandeza os núcleons (prótons e nêutrons) presentes nos feixes incidentes. Ou seja, na prática, realizar cálculos hidrodinâmicos nesse regime ultrarrelativístico supondo $n = 0$ no interior do fluido é uma aproximação, em última análise, grosseira. Mas é uma aproximação razoável e defensável.

2.3. PROCESSO ISENTRÓPICO

Consideremos então um processo em que tanto S quanto N são conservados, somente o volume V varia. As variações das densidades entrópica e bariônica serão dadas por:

$$\frac{ds}{s} = \frac{dn}{n} = -\frac{dV}{V}$$

Para calcularmos a variação da densidade de energia, usamos que a diferencial da energia interna se reduz a $dU = -PdV$:

$$dU = d(\epsilon V) = \epsilon dV + V d\epsilon = -PdV,$$

logo, em um processo isentrópico, ficamos com as identidades termodinâmicas:

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon + P} = -\frac{dV}{V} = \frac{ds}{s} = \frac{dn}{n}$$

2.4. GÁS IDEAL CLÁSSICO

Um gás ideal é composto por partículas independentes, não interagentes, e é melhor descrito por um dos três ensembles da mecânica estatística clássica: o ensemble grã-canônico. Usaremos o sistema natural de unidades ($k_B = 1$), e, para simplificar, consideraremos um modelo de um gás composto por partículas idênticas e sem spin, cada uma tendo um número bariônico igual a 1 – embora tais partículas não existam na natureza.

Em um volume V finito, segundo a mecânica quântica, os valores do momentum \vec{p} são discretos. O número médio de partículas com momentum \vec{p} é igual a:

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{E_{\vec{p}} - \mu}{T}\right) \pm 1}.$$

Nesta equação, $E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{p^2 + m^2}$ é a energia da partícula ($c=1$), e o sinal depende de a partícula ser um bóson (-) obedecendo à estatística de Bose-Einstein, ou um férmion (+), que obedece à estatística quântica de Fermi-Dirac. Mais uma vez simplificando, vamos tomar o limite clássico, em que esse número é muito menor que um, e as estatísticas quânticas se reduzem à de Maxwell-Boltzmann:

$$\frac{1}{e^{(E_{\vec{p}}-\mu)/T} \pm 1} \simeq e^{(-E_{\vec{p}}+\mu)/T} \ll 1.$$

No ensemble grã-canônico as densidades de partículas e de energia, assim como a pressão cinética, são consideradas variáveis aleatórias, com os seguintes valores médios:

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} e^{(-E_{\vec{p}}+\mu)/T} \\ \epsilon &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} E_{\vec{p}} e^{(-E_{\vec{p}}+\mu)/T} \\ P &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} p_x v_x e^{(-E_{\vec{p}}+\mu)/T}. \end{aligned}$$

Nesta expressão, a pressão cinética se obtém depois de se calcular, por unidade de tempo, a totalidade do momentum transferido por colisões elásticas sobre uma superfície unitária perpendicular ao eixo x . Para uso mais à frente, podemos também definir essa grandeza como o **fluxo** de partículas ao longo de x . No limite de grandes volumes, a soma se transforma em uma integral:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \rightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Usando a equação do gás ideal $P = nT$, e observando a simetria rotacional do integrando, podemos substituir $p_x v_x \rightarrow \vec{p} \cdot \vec{v}/3 = pv/3$. O que, para partículas sem massa, se reduz a:

$$P = \frac{\epsilon}{3}.$$

Em um QGP – plasma de quarks e glúons, observado em altas temperaturas, esta relação é aproximadamente válida, uma vez que as interações entre as partículas são desprezíveis, devido à liberdade assintótica. Para partículas sem massa, as integrais correspondentes às expressões nos somatórios acima podem ser calculadas com facilidade. Por exemplo, para um QGP sem bárions ($\mu = 0$), resultam as expressões:

$$\begin{aligned} n &= \frac{g}{\pi^2 \hbar^3} T^3 \\ \epsilon &= 3P = 3nT, \end{aligned}$$

onde g é o número de graus de liberdade, spin + cor + sabor, ou seja, 16 para glúons e 24 para quarks u e d . No total, $g \approx 40$. Cabe observar que, obviamente, n representa aqui a densidade de partículas, não mais a de bárions.

Voltando agora a uma relação intensiva já vista:

$$\epsilon = -P + Ts + \mu n$$

agora ela se reduz a:

$$\epsilon + P = Ts.$$

Substituindo acima, obtemos que, em um QGP sem bárions:

$$s = 4n.$$

A entropia por partícula em um QGP, portanto, é aproximadamente igual a 4, em unidades naturais – se considerarmos apenas glúons, 3,6; apenas quarks, 4,2.

Vale observar finalmente que, para partículas não relativísticas, como não está incluída a energia de massa mc^2 , $P \ll \epsilon$.

Antes de passarmos ao estudo das colisões ultrarrelativísticas, vejamos algumas definições de **Cinemática Relativística**.

3. AS EQUAÇÕES DE HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA

A termodinâmica tradicional diz respeito a um sistema em equilíbrio termodinâmico global. Isto significa que parâmetros intensivos como (P, T, μ) são constantes por todo o volume, e também que o sistema está globalmente em repouso, fazendo com que o seu momentum total seja 0. Veremos aqui sistemas cuja pressão e temperatura variam no espaço e no tempo, e que não estão em repouso, tal como a atmosfera em uma ventania. Por isso, exigimos que o sistema esteja em equilíbrio termodinâmico **local**. Isto quer dizer que pressão e temperatura variam tão lentamente que, para cada ponto, pode-se supor que exista equilíbrio termodinâmico em uma vizinhança volumétrica em torno desse ponto. “Vizinhança”, neste caso, tem o mesmo conceito que em matemática, e não existe prescrição quanto ao tamanho real dessa vizinhança, ou, equivalentemente, do “elemento de fluido”. Há, entretanto, uma condição geral para a definição desse equilíbrio termodinâmico, que se traduz em admitir que **o livre caminho médio de uma partícula entre duas colisões é muito inferior que todas as dimensões características do sistema**.

As equações de fluido que são obtidas sob essa condição de equilíbrio termodinâmico local são chamadas de **equações do fluido ideal**, ou **equações invíscidas** (referentes a um fluido com viscosidade nula).

3.1. REFERENCIAL DE REPOUSO EM UM FLUIDO

O referencial de repouso de um elemento de fluido é definido como o referencial galileano no qual o momentum é nulo. Todas as grandezas termodinâmicas associadas a um elemento de fluido - por exemplo, (ϵ, P, n) - são definidas nesse referencial em repouso. Consequentemente, por construção, existem escalares de Lorentz (pela mesma razão por que a massa de uma partícula é um escalar de Lorentz). O equilíbrio termodinâmico local implica o elemento de fluido possuir propriedades isotrópicas no referencial de repouso do fluido. Observe-se que esta é uma hipótese muito forte, que será usada frequentemente aqui. Na verdade, é a **única hipótese não trivial** na hidrodinâmica invíscida.

3.2. VELOCIDADE DO FLUIDO

A velocidade \vec{v} de um elemento de fluido é definida como a velocidade do referencial de repouso desse fluido em relação ao referencial do laboratório. A quadrivelocidade u^μ é definida por:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}},$$

onde foi usado o sistema de unidades naturais, com $c=1$. O fator de contração de Lorentz é u^0 . A quadrivelocidade se transforma como um quadrivetor sob as transformações de Lorentz. O quadrado de um quadrivetor é um escalar de Lorentz, e, de fato:

$$u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - \vec{u}^2 = 1.$$

Em hidrodinâmica, a velocidade do fluido, tal como as grandezas termodinâmicas (ϵ, P, n) , é uma função de (t, x, y, z) .

3.3. CONSERVAÇÃO DO NÚMERO BARIÔNICO

Na dinâmica não relativística dos fluidos, a equação de conservação de massa se escreve como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

A versão relativística dessa equação de conservação deve levar em conta a contração de Lorentz do volume por um fator u^0 . Lembrando que a densidade bariônica n é sempre definida no referencial de repouso do fluido, seu valor no referencial em movimento é dado por nu^0 . Substituindo ρ por nu^0 na equação acima, e usando que $\vec{u} = u^0 \vec{v}$, obtemos a seguinte equação covariante:

$$\partial_\mu (nu^\mu) = 0,$$

onde, como usual, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. Essa é uma equação de conservação para o quadrivetor nu^μ , nu^0 é a densidade bariônica, e $n\vec{u}$ é o fluxo bariônico.

No referencial de repouso do fluido, o fluxo bariônico é nulo. Na dinâmica não relativística dos fluidos, esta é a forma como o referencial de repouso é definido. No caso relativístico, o fluxo bariônico pode, em princípio, ser diferente de zero no referencial de repouso, uma vez que este é definido como aquele referencial onde a densidade de momentum é zero: o momentum dos bárions pode ser compensado pelo momentum de partículas sem bárions (píons, glúons). Contudo, o equilíbrio termodinâmico local implica isotropia. Se existisse uma corrente não nula, esta definiria uma direção preferencial no espaço, e a isotropia se perderia. Logo, **na hidrodinâmica invíscida o fluxo bariônico é nulo**. Já na hidrodinâmica relativística víscida, que estuda os desvios do equilíbrio termodinâmico local, o fluxo bariônico pode ser diferente de zero no referencial de repouso local, causando um fenômeno de transporte chamado **difusão**, que não discutiremos.

3.4. CONSERVAÇÃO DE ENERGIA E MOMENTUM

A conservação da energia total e do momentum fornece 4 equações locais de conservação, e cada uma delas é análoga à equação de conservação do número bariônico. A conservação bariônica resulta em uma corrente conservada, dada por um quadrivetor contravariante $J^\mu = nu^\mu$. Energia e momentum formam também um quadrivetor contravariante, e as correntes conservadas associadas podem ser escritas como um tensor contravariante $T^{\mu\nu}$, onde cada valor de ν corresponde a uma componente do quadrimomento, e cada valor de μ é uma componente da corrente associada. Explicitando:

- T^{00} é a densidade de energia
- T^{0j} é a densidade da j -ésima componente do momentum, com $j = 1, 2, 3$
 - T^{i0} é o fluxo de energia ao longo do eixo i
- T^{ij} é o fluxo ao longo do eixo i da j -ésima componente do momentum.

O fluxo de momentum T^{ij} é chamado usualmente de **tensor de pressão**. A **pressão cinética** é definida precisamente como o fluxo de momentum.

No referencial de repouso do fluido, a condição de equilíbrio termodinâmico local restringe fortemente o tensor de energia-momentum. A isotropia implica tanto a anulação do fluxo de energia T^{i0} quanto da densidade de momentum T^{0j} . Além

disso, implica a proporcionalidade entre o tensor de pressão e a matriz identidade, ou seja, $T^{ij} = P\delta_{ij}$, onde P é a pressão termodinâmica. O tensor de energia-momentum no referencial de repouso do fluido será, então:

$$T_{(0)} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

Para obtermos o tensor de energia-momentum em um referencial em movimento, devemos fazer uma transformação de Lorentz. Como precisaremos apenas da expressão de $T^{\mu\nu}$ até a primeira ordem da velocidade do fluido, a matriz de transformação de Lorentz correspondente será:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & v_x & v_y & v_z \\ v_x & 1 & 0 & 0 \\ v_y & 0 & 1 & 0 \\ v_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sob uma transformação de Lorentz, o vetor contravariante $T_{(0)}^{\mu\nu}$ terá a expressão:

$$T^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T_{(0)}^{\alpha\beta},$$

que pode ser escrito como um produto de matrizes 4×4 :

$$T = \Lambda T_{(0)} \Lambda^T,$$

onde Λ^T é a transposta de Λ , e, como vimos acima, Λ é simétrica, ou seja: $\Lambda^T = \Lambda$.

Retendo apenas os termos de ordem 1 na velocidade \vec{v} , resulta que:

$$T = \begin{pmatrix} \epsilon & (\epsilon + P)v_x & (\epsilon + P)v_y & (\epsilon + P)v_z \\ (\epsilon + P)v_x & P & 0 & 0 \\ (\epsilon + P)v_y & 0 & P & 0 \\ (\epsilon + P)v_z & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

Nota-se em primeiro lugar que $T^{\mu\nu}$ é simétrico: a densidade de momentum T^{0i} e o fluxo de energia T^{i0} são iguais. Isto se dá porque as transformações de Lorentz preservam as simetrias, e o tensor do fluido em repouso $T_{(0)}$ é simétrico. A simetria de $T^{\mu\nu}$ é uma consequência não trivial da relatividade. Na dinâmica não relativística dos fluidos, o fluxo de energia e a densidade de momentum diferem entre si (a energia não relativística não inclui a energia de massa), e são dimensionalmente diferentes: a razão entre o fluxo de energia e a densidade de momentum tem dimensão de velocidade ao quadrado, enquanto que na relatividade essa razão é adimensional.

A densidade de momentum é $(\epsilon + P)\vec{v}$. No limite não relativístico, se transforma em $\rho\vec{v}$, onde ρ é a densidade de massa. Como, no limite relativístico, $P \ll \epsilon$ e $\epsilon \simeq \rho\vec{v}$, recuperamos o resultado correto. Contrariamente a uma primeira impressão, o que substitui a densidade de massa no caso de um fluido não relativístico não é ϵ , mas $\epsilon + P$: a pressão contribui à inércia de um fluido relativístico.

Para finalizar, provaremos que o tensor de energia-momentum para uma velocidade de fluido arbitrária é:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu},$$

onde $g^{\mu\nu} \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é o tensor métrico de Minkowski. É fácil ver que esta equação se reduz à expressão para $T_{(0)}$, mostrada anteriormente, no referencial de repouso do fluido, onde $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Adicionalmente, ambos os lados da equação acima são tensores contravariantes, o que significa que se transformam idênticamente sob transformações de Lorentz: como são idênticos em um referencial, serão idênticos em qualquer referencial.

As equações de conservação de energia e momentum são:

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0.$$

Estas são as equações da hidrodinâmica relativística invíscida. Junto com a equação de estado do fluido, que é definida como uma relação funcional entre ϵ , P e n , elas formam um sistema fechado de equações.

Por simplificação, somente serão vistos fluxos contínuos, nos quais todas as grandezas variam continuamente com as coordenadas do espaço-tempo. A hidrodinâmica invíscida apresenta toda uma classe de soluções descontínuas, que são chamadas de **ondas de choque**. Através de um choque, a entropia do fluido aumenta, enquanto que em um fluxo contínuo ela se mantém constante. Ondas de choque surgem usualmente quando o fluido sofre uma compressão, e não uma expansão. Portanto, são de relevância limitada em colisões de íons pesados, exceto no caso em que, em uma expansão, a equação de estado apresenta uma transição de fase de primeira ordem.

3.5. ONDAS SONORAS

Define-se o som como uma pequena perturbação que se propaga em um fluido uniforme em repouso. A densidade de energia e a pressão se escrevem nas formas:

$$\begin{aligned}\epsilon(t, x, y, z) &= \epsilon_0 + \delta\epsilon(t, x, y, z) \\ P, (t, x, y, z) &= P_0 + \delta P(t, x, y, z),\end{aligned}$$

onde ϵ_0 e P_0 correspondem ao fluido uniforme, e $\delta\epsilon$ e δP correspondem à pequena perturbação. Para analisar a evolução dessa perturbação, linearizamos as equações de conservação de energia-momentum, retendo apenas os termos de primeira ordem em $\delta\epsilon$, δP e \vec{v} . Para este fim, será suficiente a equação:

$$T = \begin{pmatrix} \epsilon & (\epsilon + P)v_x & (\epsilon + P)v_y & (\epsilon + P)v_z \\ (\epsilon + P)v_x & P & 0 & 0 \\ (\epsilon + P)v_y & 0 & P & 0 \\ (\epsilon + P)v_z & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

uma vez que está correta até a primeira ordem na velocidade.

As equações de conservação resultantes serão:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((\epsilon + P)\vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}((\epsilon + P)\vec{v}) + \vec{\nabla} P &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Inserindo aí as expressões da densidade de densidade e da pressão e linearizando, essas equações assumem as formas simplificadas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\delta\epsilon)}{\partial t} + (\epsilon_0 + P_0)\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0 \\ (\epsilon_0 + P_0)\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} P &= \vec{0}.\end{aligned}$$

A primeira equação mostra que a densidade de energia decresce quando o campo de velocidades é divergente, $\nabla \cdot \vec{v} > 0$, isto é, quando o volume aumenta. Isso é consequência direta da conservação da energia. A segunda equação é simplesmente a segunda lei de Newton, que diz que a força sobre o fluido é dada pela multiplicação da sua inércia pela aceleração. A força por volume unitário é igual a $-\vec{\nabla} P$, e retira pressão do fluido.

Definimos agora a velocidade do som c_s pela expressão:

$$c_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \epsilon} \right)^{1/2}.$$

Portanto, c_s^2 é inversamente proporcional à compressibilidade do fluido. Uma equação de estado “suave” corresponde a um pequeno valor de c_s . A grandeza no radical só é bem definida se especificarmos ao longo de que trajetória a derivada parcial é tomada. Na dinâmica de um fluido ideal, a entropia por bárion de um elemento de fluido é conservada, enquanto função do tempo. Se o fluido é uniforme inicialmente, a entropia por bárion permanece constante em todo o fluido, todo tempo.

Isto quer dizer que a derivada parcial deve ser tomada ao longo das linhas de entropia constante por bárion, s/n . No caso particular de um QGP sem bárions, existe apenas um grau de liberdade, e não há ambiguidade ao se definir essa derivada. Usando as equações já deduzidas acima:

$$dP = sdT + nd\mu$$

$$d\epsilon = Tds + \mu dn$$

podemos reescrever c_s para o caso de um fluido sem bárions como sendo:

$$c_s = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln s} \right)^{1/2}$$

Usando a definição geral de c_s , podemos substituir $\delta P = c_s^2 \delta\epsilon$ na equação inicial de definição da pressão em uma onda sonora, e, juntando com a equação de definição da densidade de energia, eliminar \vec{v} , obtendo finalmente a expressão:

$$\frac{\partial^2(\delta\epsilon)}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta(\delta\epsilon) = 0.$$

Esta é uma equação de uma onda que se propaga em 3+1 dimensões com velocidade c_s , e expressa o fato de que pequenas perturbações viajam em um fluido uniforme com velocidade c_s , independentemente do formato da perturbação:

Em um fluido invíscido não existe dispersão.

3.6. GÁS IDEAL BARIÔNICO

Se as energias de interação entre as partículas são pequenas, quando comparadas com suas energias cinéticas, as grandezas termodinâmicas podem ser expressas em termos das propriedades individuais das partículas: número bariônico conservado N_B , velocidade \vec{v} e momentum p^μ . Usaremos a notação v^μ para $(1, \vec{v})$, ou, de forma equivalente, $v^\mu = p^\mu / p^0$. É importante observar, porém, que, a despeito da notação, v^μ não se transforma como um quadrivetor sob um boost lorentziano (Obs.: um boost é uma transformação de Lorentz no caso particular em que os dois referenciais se movem com velocidades constantes, sem rotações). A corrente bariônica e o tensor de energia-momentum de um elemento de fluido com velocidade v^μ são dados, respectivamente, pelas expressões:

$$nu^\mu = \frac{1}{V} \sum_{partículas} N_B v^\mu$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{V} \sum_{partículas} p^\nu v^\mu$$

Com estas definições, verifica-se diretamente que nu^0 , T^{00} e T^{0i} correspondem, respectivamente, a densidade bariônica, densidade de energia e densidade de momentum. Os fluxos correspondentes são obtidos a partir dessas densidades usando-se a velocidade \vec{v} das partículas como peso estatístico.

Usando a condição de equilíbrio termodinâmico local e o Teorema da Equipartição, essas grandezas podem ser substituídas por suas médias térmicas. O número médio de partículas com momentum \vec{p} é dado pela estatística de Boltzmann, como já foi visto:

$$\frac{1}{e^{(E_{\vec{p}} - \mu)/T} \pm 1} \simeq e^{(-E_{\vec{p}} + \mu)/T} \ll 1.$$

Substituindo na relação anterior a energia $E_{\vec{p}}$ pela energia E^* no referencial de repouso do fluido, e usando a correspondência para grandes volumes:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \rightarrow \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}$$

obtemos:

$$\frac{1}{V} \sum_{partículas} \rightarrow \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \exp[(-E^* + \mu/T)]$$

Este resultado será utilizado mais adiante. Finalmente, observe-se que, escrevendo $v^\mu = p^\mu / p^0$ e notando-se que $d^3 p / p^0$ é um escalar de Lorentz, as grandezas nu^μ e $T^{\mu\nu}$ são explicitamente covariantes.

4. EXPANSÃO HIDRODINÂMICA

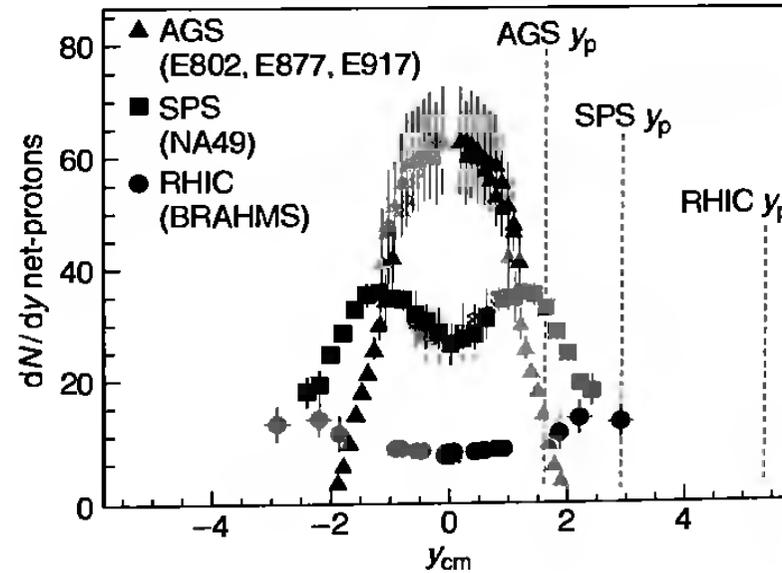
A energia máxima em uma colisão núcleo-núcleo no RHIC é de 100GeV por núcleo. Isto significa que cada núcleo incidente é contraído por um fator de Lorentz $\gamma \approx 100$. Nesse regime ultrarrelativístico, os núcleos colidem como “pizzas” muito finas - cada pizza com diâmetro de 30 cm e espessura de 3 mm, por exemplo -, que se atravessam. No espaço criado após a colisão, os quarks e glúons momentaneamente liberados do confinamento produzem, ao se reconfinarem, a partir do vácuo quântico, milhares de partículas, em um volume muito pequeno. Essas partículas interagem, e se as interações são suficientemente fortes, o sistema pode atingir um estado de equilíbrio termodinâmico local. Esse equilíbrio só pode ser local, e não global, que só seria atingido por um gás em uma caixa fechada, depois de aí permanecer por um longo período, até se tornar um meio homogêneo. O sistema formado em uma colisão de íons pesados inicia sua expansão tão logo é produzido, e está longe de ser homogêneo. A simulação animada a seguir ilustra visualmente esse processo invisível diretamente.



watch?v=xrL2ELkQO
iE

A QCD seria capaz de nos dizer, ou não, se esse sistema pode atingir um equilíbrio termodinâmico desse tipo? Ainda não temos uma resposta a esta questão, mas um grande progresso vem sendo realizado a esse respeito nos últimos anos, principalmente no que se refere ao estudo das instabilidades de um plasma de quarks e glúons. Este é o campo da dinâmica do pré-equilíbrio, uma área de pesquisa intensa atualmente. Outra questão, de outro ponto de vista: podemos dizer, a partir de dados experimentais, que o sistema realmente atingiu um equilíbrio termodinâmico local? Se mantivermos a visão de que o equilíbrio local é, na melhor das hipóteses, uma aproximação, veremos mais adiante que algo pode ser extraído dos experimentos. Mas, mesmo obtendo-se resultados aceitáveis, estamos ainda longe do final da história.

O gráfico abaixo ilustra a dependência, em relação à energia do feixe incidente, da distribuição da rapidez y em colisões de alta energia do número líquido de prótons $N = (N_{próton} - N_{antipróton})$:



AGS (Alternating Gradient Synchrotron – BNL): $\sqrt{s_{NN}} = 5\text{GeV Au+Au}$, $u/c = 1 - 10^{-8}$; SPS (Super Proton Synchrotron – CERN): $\sqrt{s_{NN}} = 17\text{GeV Pb+Pb}$, $u/c = 1 - 10^{-9}$; RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider - BNL): $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{GeV Au+Au}$, $u/c = 1 - 10^{-11} \therefore u = 0,999999999999c$.

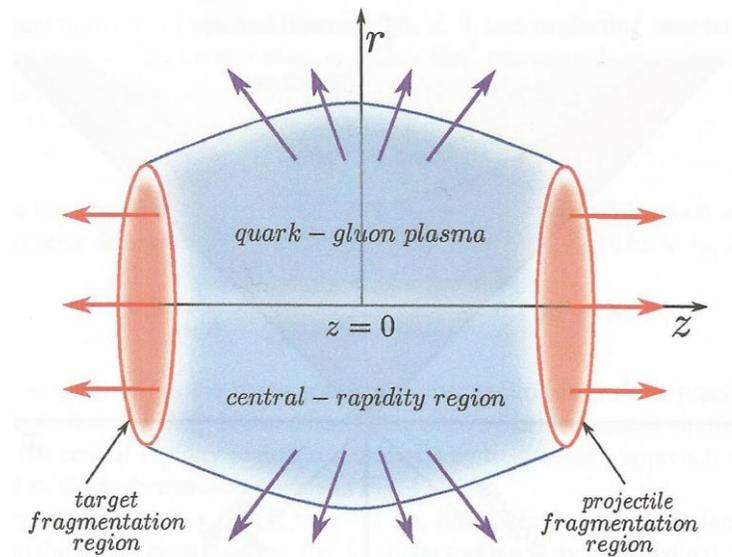
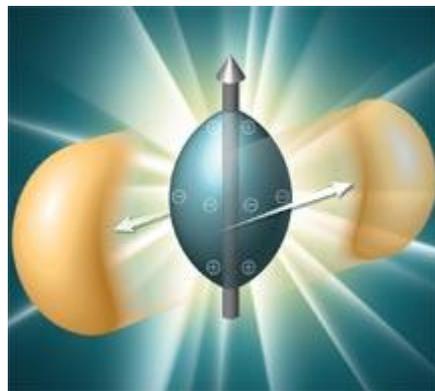
Esses resultados mostram que a baixas energias relativísticas, verifica-se o modelo de Landau, em que as partículas emergentes assumem a rapidez y_{cm} do centro de massa. Ou seja, os núcleos são freados pela chamada **nuclear stopping power**; a energias mais altas, a frenagem diminui, e se forma uma depressão na distribuição na vizinhança da rapidez do centro de massa, que passa a ser um mínimo local; finalmente, a energias ultrarrelativísticas, a distribuição é

aproximadamente constante: os núcleos ficam “transparentes”, e se atravessam, confirmando o modelo de Bjorken e Feynman.

Vamos assumir aqui, porém, que o sistema de campos e partículas interagentes produzidos na colisão atinge efetivamente, em algum ponto, um equilíbrio termodinâmico local. E que sua evolução subsequente segue as leis da hidrodinâmica invíscida que foram mostradas. Uma vez que as equações de movimento do sistema são equações diferenciais parciais de primeira ordem, a análise matemática nos diz que suas soluções são univocamente determinadas pela especificação de condições iniciais e pela equação de estado correspondente.

4.1. CONDIÇÕES INICIAIS

Escolhemos usualmente o eixo z como o eixo de colisão, e a origem é escolhida de forma a satisfazer as condições iniciais da colisão em $z = t = 0$. No RHIC, os dois núcleos se atravessam em um tempo $t_{col} \sim 0,15 \text{ fm}/c = 5 \times 10^{-25} \text{ s}$. Como o raio transversal do núcleo, $R \sim 20 \text{ fm}$, é 2 ordens de grandeza maior, existe uma clara hierarquia entre as duas escalas de tempo.



As condições iniciais são fixadas em algum tempo inicial t_0 (ou, de forma mais rigorosa, em um hiperboloide do tipo espaço). Um conjunto completo de condições iniciais envolverá, em cada ponto do espaço, as três componentes da velocidade do fluido, a densidade de energia e a densidade bariônica.

Se o tempo de termalização t_0 for suficientemente curto, as componentes transversas v_x e v_y da velocidade do fluido terão ambos valores nulos. A razão disso é que as colisões párton – párton (ou seja, quark - quark, quark – glúon, glúon – glúon) ocorrem em escalas transversas muito curtas. Essas colisões produzem partículas cujos momentos transversos são distribuídos isotropicamente no plano transversal. Essa isotropia implica que não existe direção preferencial, e que o valor médio do momento transversal, quando tomado em um elemento de fluido, é nulo. Essa parte das condições iniciais é a única sobre a qual existe uma concordância próxima ao consenso. É por esta razão que as evidências mais incisivas de um comportamento hidrodinâmico estão associadas com o “fluxo transversal”. A lógica é a seguinte: se inicialmente não existe movimento coletivo transversal no sistema, mas esse fluxo transversal é revelado pelos dados, significa que algo ocorreu nesse meio tempo que tem a ver com a hidrodinâmica.

Para analisarmos esse comportamento, começamos discutindo o valor inicial da velocidade longitudinal inicial de fluxo v_z . Todas as partículas são produzidas em um intervalo de tempo muito curto em torno de $z = t = 0$. A prescrição padrão é de que seu movimento longitudinal é uniforme, logo, sua velocidade é $v_z = z/t$. O que significa que todas as partículas em um dado z tem a mesma velocidade v_z , e, logo, esta será também a velocidade do fluido. Essa prescrição é invariante sob um boost, no seguinte sentido: se fizermos uma transformação de Lorentz homogênea – mantendo a origem – usando uma velocidade v ao longo do eixo z , todas as três grandezas v_z , z e t serão transformadas, mas a relação $v_z = z/t$ permanece válida no novo referencial. Isto se dá porque um movimento uniforme se mantém uniforme sob uma transformação de Lorentz. Essa prescrição “invariante de boost” foi sugerida primeiramente por James Bjorken em 1983, e se mantém sustentada por modelos calcados na QCD de altas energias, como o de **condensado de vidro de cor**. Segundo este modelo, os glúons em um núcleon ultrarrelativístico se condensariam transversalmente, pela contração de Lorentz, em uma **parede, ou vidro de glúons**, e o QGP resultaria das colisões entre essas paredes de glúons.

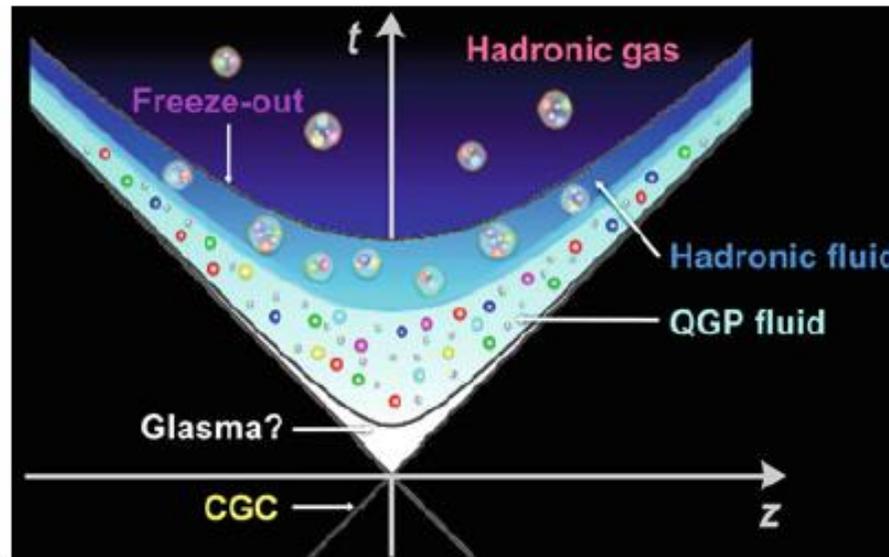
Já quanto a outras prescrições, referentes às condições iniciais das densidades, não existe consenso. Existem, no máximo, restrições, tanto teóricas quanto experimentais, e prescrições que satisfazem essas restrições. Do lado da teoria, há

a localidade, que implica que a densidade inicial em um dado ponto (x, y) do plano transversal pode depender apenas das funções T_A e T_B que dão a espessura de cada um dos núcleos nesse ponto, e que são definidas através das integrais:

$$T_{A,B}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{A,B}(x, y, z) dz,$$

onde $\rho_A(x, y, z)$ (respectivamente ρ_B) é a densidade de núcleons por unidade de volume no núcleo A (respectivamente B). A densidade de energia inicial é dada por $\epsilon(x, y, z) = f(z, T_A(x, y), T_B(x, y))$, onde f é uma função a ser determinada.

A figura abaixo ilustra a evolução temporal da colisão ultrarrelativística entre dois íons pesados, com as diversas etapas previstas pela QCD e pela RHD:



A geometria hiperbólica se deve à dilatação temporal lorentziana da expansão relativística longitudinal do fluido em seu cone de luz.

4.2. EXPANSÃO LONGITUDINAL (PRESCRIÇÃO DE BJORKEN)

Para a velocidade longitudinal do fluido, escolhamos $v_z = z/t$. Pode mesmo ocorrer que essa relação $v_z = z/t$ permaneça válida durante toda a expansão termodinâmica, o que é a prescrição de Bjorken original. Analisaremos agora sob quais condições $v_z = z/t$ por todo o tempo. Iniciaremos com o caso mais simples $z = 0$, e escreveremos a segunda das equações de conservação encontradas anteriormente, projetando-a sobre o eixo z :

$$\frac{\partial}{\partial t}((\epsilon + P)v_z) + \frac{\partial}{\partial z}P = 0.$$

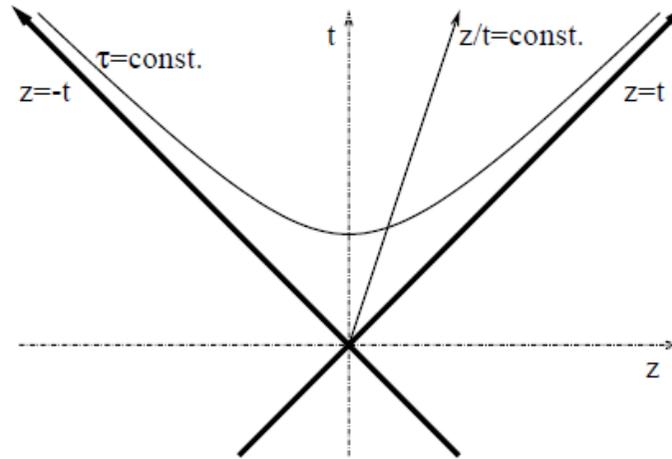
Vemos que $v_z = 0$ somente no caso em que $\partial P/\partial z = 0$. A interpretação física é óbvia: se há um gradiente de pressão no sentido do crescimento do eixo z , o fluido é acelerado, e v_z varia com o tempo.

Generalizando esse resultado para $z \neq 0$, introduzimos antes novas variáveis:

$$\begin{aligned}\tau &= \sqrt{t^2 - z^2} \\ y_s &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right).\end{aligned}$$

Nessas definições, τ é o tempo próprio, e y_s é a rapidez no espaço-tempo ($y_s = \text{arctanh } v/c$).

Algumas linhas com τ e y_s constantes são mostradas na figura abaixo.



Está representada acima uma colisão núcleo – núcleo no plano (z, t) . As linhas grossas são as trajetórias ultrarrelativísticas desses núcleos, que se movem a uma velocidade próxima à da luz. As linhas de z/t constante são também as linhas de y_s constante. Na vizinhança de $z=0$, temos $\tau \approx t$ e $y_s \approx z/t$. Nas novas variáveis, portanto, quando $y_s=0$ a prescrição $v_z = z/t$ se transforma em $(\partial P / \partial y_s)_\tau = 0$.

Podemos usar agora a propriedade da invariância de boost citada acima: qualquer valor de z com $|z| < t$ pode ser trazido para $z=0$ por meio de um boost de Lorentz homogêneo na direção z . Notemos que esse boost deixa o tempo próprio τ inalterado, e efetua uma translação de valor constante em y_s , deixando, portanto, $(\partial P / \partial y_s)_\tau$ inalterado. Como consequência disso, o resultado obtido anteriormente, $(\partial P / \partial y_s)_\tau = 0$, é válido para todos os valores da rapidez y_s . Esta é a condição geral sob a qual $v_z = z/t$ por todo tempo. A prescrição de Bjorken prediz espectros planos de rapidez, que, entretanto, não são observados experimentalmente. Por outro lado, aqueles observáveis associados com os momentos transversos (em particular

os espectros do momento transverso p_T , o fluxo elíptico), não são muito sensíveis a essa dependência da rapidez. Por esta razão, numerosos cálculos hidrodinâmicos continuam a usar a prescrição de Bjorken.

Um aspecto importante do modelo de Bjorken é ser insensível aos detalhes do processo de termalização, ou de evolução até o equilíbrio termodinâmico. Uma vez que a condição inicial $v_z = z/t$ é preservada na evolução subsequente, o valor preciso do tempo inicial não é importante. Se, ao contrário, $\partial P/\partial y_s \neq 0$, o escalonamento $v_z = z/t$ é quebrado por essa evolução termodinâmica, e o valor inicial do tempo passa a ser importante, introduzindo no modelo uma dependência adicional.

Calculemos agora a evolução da densidade de energia no modelo de Bjorken. Assumimos que as componentes transversas da velocidade, assim como suas derivadas espaciais, sejam desprezíveis. Mostraremos que esta é uma boa aproximação, desde que se observe a condição $t \ll R$, onde R é o tamanho transverso típico do sistema em colisão. Escrevemos para $z = 0$ a primeira das equações de conservação

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((\epsilon + P)\vec{v}) = 0$$

A prescrição de Bjorken $v_z = z/t$ resulta em $v_z = 0$ e $\partial v_z/\partial z = 1/t$, e a equação acima se escreve:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\epsilon + P}{t} = 0.$$

A generalização para z arbitrário se obtém pela transformação para as coordenadas (τ, y_s) , e pela simples substituição na equação acima $(\partial/\partial t)_z$ por $(\partial/\partial \tau)_z$ e t por τ .

Esta equação mostra que a densidade de energia decresce com o tempo, o que é natural, uma vez que o sistema está se expandindo. Desprezando a expansão transversal, o volume aumenta proporcionalmente ao tamanho longitudinal, isto é, a t . A energia de um elemento de fluido em movimento coletivo cresce em escala como ϵt , e a equação anterior pode ser reescrita como:

$$d(\epsilon t) = -P dt.$$

Isto mostra que a **energia total decresce**, devido ao trabalho negativo das forças da pressão, $dE = -PdV$. Este resultado, que equivale a um **resfriamento longitudinal**, não é de nenhuma forma trivial. Repousa sobre nossa hipótese de equilíbrio local, que implica a isotropia da pressão. Na equação acima, P equivale ao elemento tensorial T^{33} encontrado anteriormente, e, na verdade, é a pressão **longitudinal**. Para um gás ideal, temos que:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{V} \sum_{partículas} p^\nu v^\mu \rightarrow T^{33} = \frac{1}{V} \sum_{partículas} p_z v_z.$$

Se as partículas são produzidas inicialmente com $v_z = z/t$ (como é o caso do condensado de vidro de cor), a pressão longitudinal é nula em $z=0$. Uma pressão longitudinal não nula somente pode surgir como resultado do processo de termalização. Muito do trabalho sobre termalização diz respeito a se tentar compreender como é gerada essa pressão longitudinal.

Diferentemente da energia, a entropia total de um elemento de fluido que se move coletivamente é constante: $dE = -PdV$ significa que $dS = 0$. Este é um resultado geral para a hidrodinâmica invíscida. Fisicamente, significa que não ocorre difusão de calor entre as células de fluido, nem difusão de partículas. Para mostrar isso explicitamente, basta combinar as equações

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon + P} = -\frac{dV}{V} = \frac{ds}{s} = \frac{dn}{n}$$

e

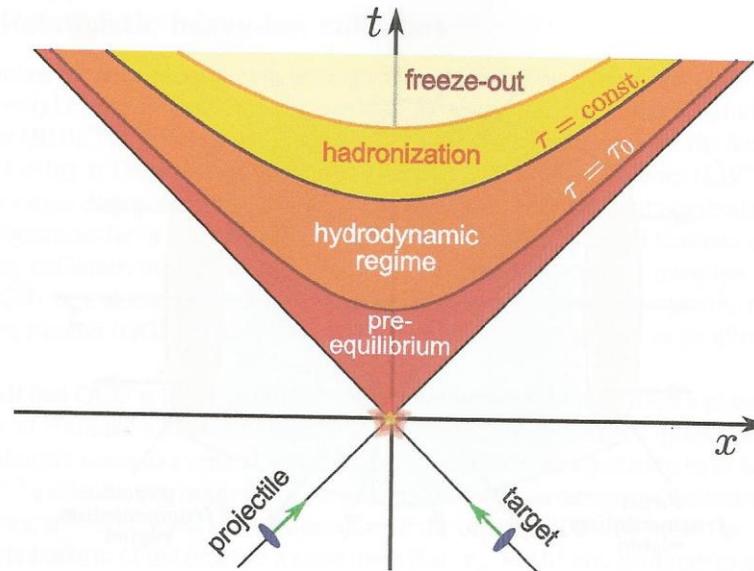
$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\epsilon + P}{t} = 0.$$

Obtemos então:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{s}{t} = 0,$$

mostrando assim que st é constante.

Vale notar que nos dados experimentais não há evidência direta do resfriamento longitudinal. Esses dados experimentais são partículas, as quais são emitidas em sua maioria no estágio final da evolução do processo, de forma que nosso conhecimento dos estágios iniciais é indireto. O resfriamento longitudinal implica uma energia inicial mais alta que uma energia final dada. E isto só pode ser observado por uma verificação direta da temperatura inicial. Os observáveis mais promissores nesse aspecto são observáveis eletromagnéticos, fótons e dileptons “térmicos”, os quais são emitidos majoritariamente nos primeiros estágios e sensíveis à temperatura, porém são acompanhados por um grande número de eventos de fundo que dificultam sua detecção isolada. Por outro lado, o resfriamento longitudinal é claramente favorecido teoricamente, por exemplo, em modelos de produção de partículas baseados na QCD perturbativa, que resultam em uma energia inicial significativamente maior, atingindo um fator multiplicativo de três, do que a energia final, exigindo, portanto, um substancial resfriamento longitudinal para se obter a concordância com os dados experimentais. O diagrama espaço-temporal abaixo mostra os diferentes estágios após uma colisão ultrarrelativística em $z = 0$, $t = 0$.



4.3. ORDENS DE GRANDEZA

Será que podemos usar os dados experimentais para estimar a densidade inicial em uma colisão de íons pesados? Uma estimativa popular é a estimativa “Bjorken” da densidade de energia como sendo a razão entre a energia final “transversa” (definida como $E \sin \theta$, onde θ é o ângulo relativo entre a velocidade vetorial da partícula e o eixo de colisão, o próprio ângulo polar) e o volume inicial. Essa estimativa ignora o resfriamento longitudinal, e, logo, subestima a energia inicial.

Uma vez que a entropia se conserva, e o número de partículas é aproximadamente proporcional à entropia ($s = 4n$), como já vimos, uma hipótese mais segura é assumir que o número de partículas permanece constante durante a evolução do sistema. É interessante se notar que, enquanto as estimativas da QCD perturbativa fracassam no cálculo da energia, dão uma multiplicidade de glúons comparável à multiplicidade observada, o que parece dar suporte à última hipótese.

Com o fim de estimar a densidade inicial, assumiremos por simplificação a prescrição de Bjorken, isto é, que a velocidade longitudinal das partículas permanece constante: $v_z = z/t$. Neste caso, a densidade de partículas no tempo t será igual a:

$$n(t) = \frac{1}{S} \frac{dN}{dz} = \frac{1}{St} \frac{dN}{dv_z},$$

onde S é a área transversa da região de interação, que corresponde a $S \approx \pi R^2 \approx 100 \text{ fm}^2$ no caso de uma colisão central Au-Au. Como estamos interessados na densidade de partículas no referencial de repouso do fluido, escolhemos calcular a estimativa em $z=0$, onde o fluido está em repouso. O experimento PHOBOS, um dos quatro detectores de partículas no RHIC, mediu em 2002 a distribuição do ângulo polar de partículas carregadas em colisões frontais Au-Au para uma energia de 100 GeV por núcleon e com $v_z = v \cos \theta$, e encontraram $dN_{\text{carga}}/d\theta \approx 700$. Para partículas emitidas em torno de $\theta = \pi/2$ com velocidade v , resulta que $dN/dv_z = (1/v)dN/d\theta$. O fator $1/v$ equivale em média a um fator de 1,25, e as partículas com carga elétrica representam somente $2/3$ do total de partículas produzidas, logo, $dN/dv_z \approx 1300$.

Numericamente, temos então, para uma colisão central Au-Au no máximo da energia do RHIC:

$$n(t) \simeq \frac{13}{t},$$

com n dado em fm^{-3} e t em fm/c .

Comparemos agora essa estimativa obtida a partir de dados experimentais com a estimativa apresentada anteriormente para a densidade de partículas em um QGP,

$$n = \frac{g}{\pi^2 \hbar^3} T^3$$

A QCD na rede (LQCD) prediz que a transição para o QGP ocorre à energia próxima a $T_c \approx 192 \text{MeV}$. Uma vez que $\hbar c = 197 \text{MeV} \cdot \text{fm}$, e estamos trabalhando com $c = 1$, esta estimativa teórica diz que, em T_c :

$$n \simeq 3.75 \text{ fm}^{-3}.$$

Comparando com a expressão experimental para $n(t)$, vemos que o sistema estará acima da densidade crítica somente se $t < 3,5 \text{ fm}/c$. Ou seja, o tempo de vida do QGP é aproximadamente de $3,5 \text{ fm}/c$. É claro que essa é uma estimativa grosseira, pois o perfil da densidade não é homogêneo em toda a área transversa S : a densidade máxima, ao centro, é aproximadamente o dobro da densidade média, com um tempo de vida, portanto, duas vezes maior que a vida média do QGP. Além do mais, ignoramos a expansão transversal, cuja influência se traduz em reduzir o tempo de vida.

4.4. ORIGENS DA EXPANSÃO TRANSVERSAL

A velocidade transversal inicial do fluido é 0, mas a aceleração, em geral, é diferente de zero. Vamos projetar sobre o eixo x a equação:

$$\frac{\partial}{\partial t}((\epsilon + P)\vec{v}) + \vec{\nabla}P = \vec{0}.$$

Assumindo que $v_x = 0$, obtemos:

$$(\epsilon + P)\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x},$$

e uma equação similar para o eixo y . Se existirem gradientes de pressão, o fluido será acelerado. Usaremos agora as equações:

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon + P} = -\frac{dV}{V} = \frac{ds}{s} = \frac{dn}{n}$$

e

$$c_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \epsilon}\right)^{1/2}.$$

A equação projetada sobre o eixo x será escrita agora como:

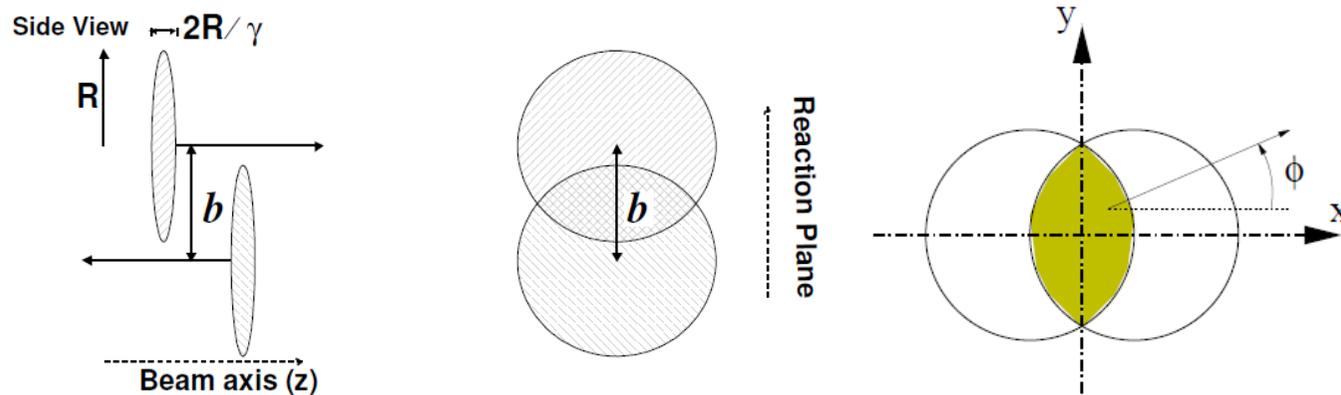
$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -c_s^2 \frac{\partial \ln s}{\partial x}.$$

Vamos assumir simplificadamente um perfil gaussiano para a densidade de entropia:

$$s(x, y) \propto \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right),$$

sendo σ_x e σ_y os desvios padrões respectivos em x e y .

Para uma colisão central (quando o **parâmetro de impacto** $b=0$) Au+Au, $\sigma_x = \sigma_y \approx 3 fm$. Para uma colisão não central em geral se escolhe o eixo x como a direção do parâmetro de impacto, e $\sigma_x < \sigma_y$. Para uma colisão Au+Au com parâmetro de impacto $b=7 fm$, temos $\sigma_x \approx 2 fm$ e $\sigma_y \approx 2,6 fm$. As figuras abaixo ilustram essas colisões, o parâmetro de impacto e o ângulo azimutal entre as velocidades das partículas e o eixo x :



Introduzindo a entropia gaussiana na equação anterior, e, para simplificar, considerando constante a velocidade do som c_s , integramos sobre t , obtendo, para t pequeno:

$$v_x = \frac{c_s^2 x}{\sigma_x^2} t, \quad v_y = \frac{c_s^2 y}{\sigma_y^2} t.$$

Cabe justificar porque a integração foi feita de 0 a t . Termalização certamente requer um certo tempo, e a hidrodinâmica não é aplicável a tempos muito anteriores. Por outro lado, o sistema se encontra em expansão livre no vácuo, e é evidente que a expansão transversal começa imediatamente, não esperando até a termalização ser atingida, de forma que há uma probabilidade razoável em se considerar a expansão transversal sendo iniciada em $t=0$.

As expressões para v_x e v_y obtidas acima mostram que a expansão transversal, diferentemente da longitudinal, é um processo muito suave. Este resultado não é intuitivo: em tempos iniciais, a pressão é muito alta, assim como os gradientes de pressão, de modo que é exercida sobre o sistema uma força de grande intensidade, como podemos deduzir da equação:

$$(\epsilon + P) \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x},$$

já obtida. Mas antepõe-se a essa força uma inércia também grande, $(\epsilon + P)$, compensando-a, fazendo resultar um crescimento linear na velocidade transversa do fluido.

Outro resultado importante é que $\sigma_x < \sigma_y$ resulta em $\langle v_x^2 \rangle > \langle v_y^2 \rangle$, onde os valores médios são tomados usando-se como peso a densidade inicial. Isto significa que a expansão transversal é maior ao longo da menor dimensão, porque o gradiente de pressão é maior, logo, a aceleração também é maior. Resulta então que mais partículas são emitidas nas proximidades de $\phi = 0$ e $\phi = \pi$, ou seja, paralelamente ao eixo x , e emitidas em menor número em torno de $\phi = \pm\pi/2$, paralelamente ao eixo y . Este efeito corresponde a um termo em $\cos 2\phi$ na decomposição de Fourier da distribuição azimutal:

$$\frac{dN}{d\phi} \propto 1 + 2v_2 \cos 2\phi.$$

Nesta expressão, v_2 é um coeficiente real e positivo, que recebe o nome de **fluxo elíptico**. A dependência que se observa em v_2 do momentum transverso e da espécie das partículas é considerada a evidência mais sólida para o comportamento hidrodinâmico em uma colisão núcleo-núcleo entre íons pesados.

4.5. ESCALA TEMPORAL DA EXPANSÃO TRANSVERSAL

Nossa equação para o resfriamento longitudinal,

$$d(\epsilon t) = -P dt.$$

foi obtida ignorando-se a expansão transversal. Se não houvesse expansão transversal, o sistema esfriaria para sempre, até não restar mais nenhuma energia na região central da rapidez. A expansão transversal age efetivamente como um ponto de corte (*cutoff*) para o resfriamento longitudinal. O tempo típico em que a expansão transversal se torna significativa é, por razões de dimensionalidade, σ_x/c_s ou σ_y/c_s . Uma variável de escalonamento conveniente é dada pela seguinte relação:

$$R \equiv \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} \right)^{-1/2}.$$

A energia transversal total pode ser calculada, em uma ótima aproximação, assumindo-se que a primeira equação acima seja válida até o instante $t = R/c_s$, e que a energia se conserve constante para $t > R/c_s$. Isto é o que significa dizer que a expansão transversal atua como um corte efetivo para o resfriamento longitudinal.

Um fator importante para os modelos hidrodinâmicos é o de que as distribuições de momentum das partículas produzidas dependem da equação de estado, e, logo, os dados experimentais impõem vínculos à equação de estado. Muito dessa dependência se deve à simples prescrição acima, de que, após $t = R/c_s$, a energia e a entropia do fluido se conservam essencialmente constantes. Uma vez que a multiplicidade é proporcional à entropia, isso também implica que a energia média por partícula também permaneça constante. Como consequência, a energia transversal por partícula reflete o estado termodinâmico do sistema em $t \approx R/c_s$. E, uma vez que a energia por partícula tem a mesma escala que a temperatura, segundo a equação:

$$\epsilon = 3P = 3nT,$$

pode dar uma informação direta sobre a temperatura do sistema em $t \approx R/c_s$. A densidade de entropia nesse instante também pode ser estimada pela multiplicidade $n(t)$ das partículas, como foi visto na comparação de ordens de grandeza experimentais e teóricas. E os dados experimentais implicam uma temperatura baixa, o que acarreta por sua vez que a

equação de estado seja “suave”, como nos informa a expressão da velocidade do som c_s . Portanto, modelos hidrodinâmicos favorecem uma equação de estado mais suave, por exemplo, que a prevista pela LQCD.

Naturalmente, R/c_s é também o tempo característico para a produção do fluxo elíptico: no instante R/c_s , v_2 possui tipicamente a metade do seu valor inicial. O valor numérico de R/c_s para uma colisão Au+Au é de $3,6 \text{ fm}/c$ para $b=0$ (colisão central), e $2,7 \text{ fm}/c$ para $b=7 \text{ fm}$. Isto explica porque o fluxo elíptico é considerado uma manifestação da pressão inicial.

O valor final do fluxo elíptico é uma boa ilustração de como a escolha das condições iniciais pode influenciar os resultados. Os primeiros cálculos hidrodinâmicos haviam previsto um valor de v_2 tão alto quanto o observado no RHIC, e foi esta a maior razão para o sucesso da hidrodinâmica invíscida. Entretanto, atualmente há uma crença bastante difundida em que essa aparente concordância se deveu a condições iniciais irrealistas. Vejamos uma breve explicação do por que dessa conclusão. A hidrodinâmica prediz que v_2 seja proporcional à excentricidade ε da distribuição inicial, definida pela expressão:

$$\varepsilon \equiv \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}.$$

Os primeiros cálculos hidrodinâmicos estimavam ε usando um escalonamento conhecido com **participante** - a densidade de entropia inicial é proporcional à densidade dos participantes $T_A + T_B$, ou de **colisões binárias** - a densidade de energia inicial é proporcional à densidade de colisões binárias $T_A T_B$ - onde T_A e T_B são as funções de espessura dos dois núcleos que colidem em um ponto, $T_{A(B)}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{A(B)}(x, y, z) dz$. Descobriu-se recentemente (2004 – 2006), porém, que o modelo clássico do Condensado de Vidro de Cor (*Color Glass Condensate* - CGC) prediz uma excentricidade significativamente maior. Outro efeito independente pode aumentar a excentricidade, e foi sugerido somente por dados experimentais: espera-se que ε seja nula para colisões centrais, mas um valor de v_2 não nulo é observado, mesmo para essas colisões centrais. Ainda mais surpreendentemente, esse efeito é maior com núcleos menores. O valor de v_2 em colisões centrais entre íons de

$^{52}_{29}\text{Cu}$ é quase o dobro do observado em colisões $^{197}_{79}\text{Au}$. Colaboradores do experimento PHOBOS sugeriram em 2007 que esse efeito pode se originar nas flutuações nas posições dos núcleons no interior do núcleo. Acontece que é extremamente difícil mensurar essas flutuações, pela grande dificuldade em isolar os seus efeitos dos efeitos de fundo. Paradoxalmente, a incerteza atual sobre o perfil inicial das densidades é maior do que há poucos anos atrás.

5. ESPECTROS DE PARTÍCULAS E ANISOTROPIAS

O fluido eventualmente se transforma em partículas livres que chegam ao detector. Vejamos algumas das propriedades da distribuição de momentum das partículas emitidas por um fluido. A transição entre um fluido – no qual as partículas realizam muitas colisões – e partículas livres não pode ser descrita pela mecânica dos fluidos. Se a hidrodinâmica viscosa é válida durante a maior parte da expansão, é razoável podermos assumir que os estágios finais da expansão não afetam as propriedades essenciais das distribuições de momentum. Assumimos, assim, que a distribuição de momentum das partículas emergentes seja essencialmente a mesma distribuição de momentum das partículas no interior do fluido, a caminho do final da expansão hidrodinâmica, e que o fluido consiste em partículas independentes, como um gás ideal. Essas hipóteses formam a base da “abordagem de congelamento (*freeze-out*) de Cooper-Frye”. Assumiremos também que o fluido não contém bárions, e que as distribuições de momentum obedecem à estatística de Boltzmann:

$$\frac{dN}{d^3x d^3p} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{E^*}{T}\right),$$

onde E^* é a energia da partícula no referencial de repouso do fluido.

5.1. MOVIMENTO COLETIVO E PARTÍCULAS RÁPIDAS

O fator de Boltzmann acima é máximo quando a energia E^* no referencial de repouso do fluido é mínima. Para uma velocidade dada do fluido, E^* é mínima quando a partícula está em repouso no referencial de repouso do fluido, isto é, quando $E^* = m$. Por sua vez, isto significa que a velocidade da partícula no laboratório é igual à velocidade do fluido - a partícula move-se solidariamente com o fluido, com momentum $p^\mu = mu^\mu$. Para partículas leves, isto corresponde a

momentos transversos baixos – mesmo se o fluido possui uma velocidade transversa tão alta quanto 0,7, o momentum transverso correspondente é aproximadamente igual à massa (140MeV para píons, 500MeV para prótons).

Nesta região de baixo momentum, a distribuição de momentum depende de como a velocidade do fluido se distribui, e poucos resultados gerais podem ser obtidos.

Estudemos então as partículas que se movem mais velozmente que o fluido, a que chamaremos de “partículas rápidas”. Para essas partículas rápidas, E^* é maior do que m . Para um momentum dado \vec{p} da partícula, o mínimo de E^* ocorre quando a velocidade do fluido é paralela a \vec{p} . Logo, será mais provável serem emitidas partículas rápidas a partir de regiões em que a velocidade do fluido é paralela às suas velocidades. Este resultado pode ser rigorosamente justificado, usando-se o método do ponto de sela. Para simplificar, estudaremos partículas emitidas em $\theta = \pi/2$, isto é, com $p_x = 0$, obtendo propriedades das distribuições de momentum transverso. Uma vez que o momentum transverso é invariante sob boosts de Lorentz ao longo de z , os resultados finais serão válidos mesmo se $v_x \neq 0$.

No referencial de laboratório, de forma geral, pode-se escrever a energia da partícula no referencial de repouso do fluido como $E^* = p^\mu u_\mu$. Por uma dupla razão: 1) $p^\mu u_\mu$ é um escalar de Lorentz, e independe do referencial onde esteja sendo calculado; 2) $p^\mu u_\mu$ se reduz a p^0 se a velocidade do fluido for zero. Assumindo que a velocidade do fluido é paralela à velocidade da partícula, e que $p_z = 0$, obtemos:

$$E^* = p^\mu u_\mu = m_t u^0 - p_t u_t,$$

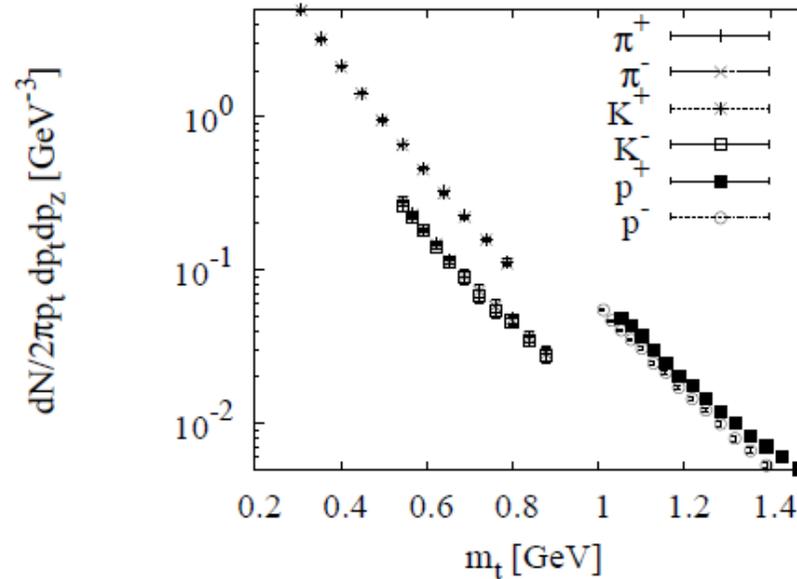
onde p_t é o momentum transverso da partícula e $m_t = \sqrt{p_t^2 + m^2}$ a sua “massa transversa”, que é igual à energia da partícula quando $p_z = 0$. A definição de uma partícula rápida corresponde a considerar que sua velocidade excede a velocidade máxima do fluido, isto é, $p_t > mu$, ou, de forma equivalente, $m_t > mu^0$, por todo o fluido. Para uma partícula rápida, E^* é mínima se u é máxima. Isto quer dizer que as partículas rápidas são emitidas a partir das regiões em que a velocidade do fluido é maior.

5.2. FLUXO RADIAL

Vamos ver inicialmente a distribuição do momentum transverso das partículas emitidas em colisões centrais. A simetria rotacional no plano transverso nos dá que $dp_x dp_y = 2\pi p_t dp_t dp_z$. Usando as duas últimas equações acima, resulta que:

$$\frac{dN}{2\pi p_t dp_t dp_z} \propto \exp\left(\frac{-m_t u_0 + p_t u}{T}\right).$$

Se o fluido está em repouso, isto é, se $u = 0$ e $u^0 = 1$, esperamos que os espectros sejam exponenciais em m_t , com a mesma inclinação $1/T$ para todas as partículas. É uma característica geral da estatística de Boltzmann que as energias cinéticas associadas com o movimento térmico sejam sempre de ordem T , independentemente da massa da partícula. É exatamente isso que se observa nas colisões próton-próton. A figura abaixo mostra, em escala logarítmica, as distribuições de momentum de vários hádrons em função da massa transversa:



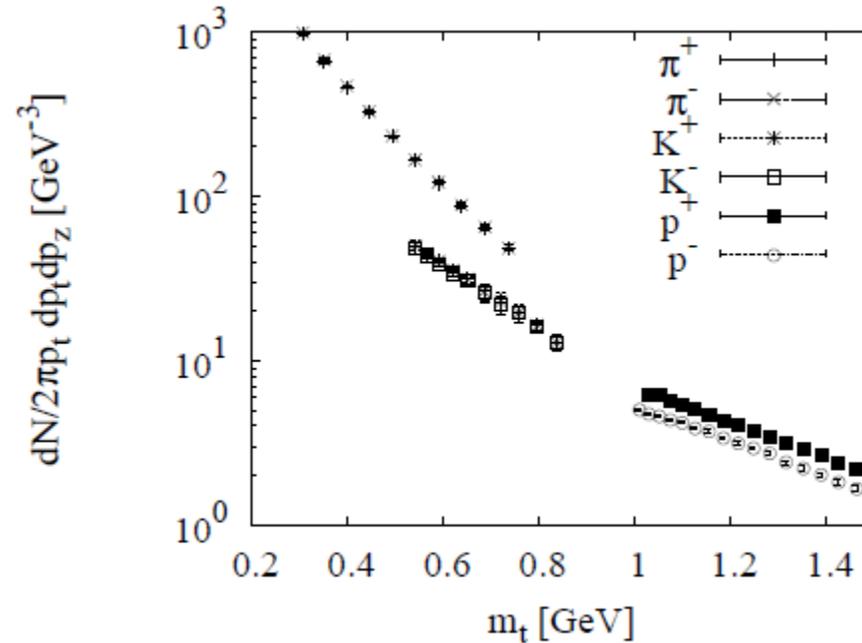
No eixo à esquerda, N representa o número de partículas por evento. Píons, prótons e antiprótons localizam-se essencialmente sobre a mesma linha. Prótons estão ligeiramente acima dos antiprótons, o que mostra a qualidade da nossa aproximação considerando um fluido sem bárions. O espectro de káons ($K^+ = u\bar{s}$; $K^0 = d\bar{s} / s\bar{d}$; $K^- = s\bar{u}$) tem a mesma inclinação da linha de prótons e antiprótons, mas está deslocado para baixo, como consequência da “supressão da estranheza”: menos partículas com estranheza são produzidas do que seria o esperado segundo os modelos estatísticos.

Será mostrado a seguir que a invariância de escala segundo m_t é quebrada quando o fluido se move. No máximo do movimento térmico, surge uma velocidade coletiva v , a velocidade do fluido, que é a mesma velocidade de todas as partículas no fluido. A energia cinética associada com esse movimento coletivo, no limite não relativístico, é igual a $mv^2/2$. Como essa energia cinética aumenta com a massa da partícula, espera-se que partículas mais massivas terão energias cinéticas mais altas, na presença de um fluxo coletivo. Explicitando, extraímos o logaritmo da última equação e derivamos o resultado com relação a m_t . Usando o fato de que $p_t^2 = m_t^2 - m^2$ implica $dp_t/dm_t = m_t/p_t$, obtemos:

$$\frac{d}{dm_t} \log \left(\frac{dN}{2\pi p_t dp_t dp_z} \right) = \frac{-u_0 + um_t/p_t}{T}.$$

Ou seja, para uma dada massa transversa m_t , partículas mais pesadas têm um momento transversal p_t menor. Se $u > 0$, isto contribui positivamente para a inclinação da curva, resultando em espectros de m_t mais retilíneos.

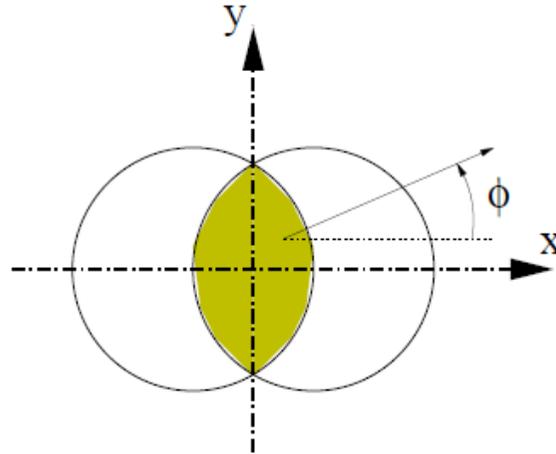
Esse resultado pode ser visto claramente na figura abaixo, que representa colisões Au+Au, na qual os espectros de antiprótons e káons são muito mais retilíneos do que os espectros de píons.



Usualmente, essa observação experimental é considerada como evidência do fluxo transversal. No caso de colisões centrais, que possuem simetria no plano (x, y) , o fluxo transversal é particularmente chamado de **fluxo radial**.

5.3. FLUXO ELÍPTICO

Veremos agora as colisões majoritárias, não centrais, com os eixos definidos como na figura abaixo:



E podemos reescrever a equação:

$$\frac{dN}{d^3x d^3p} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{E^*}{T}\right),$$

usando a identidade $dp_x dp_y = p_t dp_t d\phi$, e a equação:

$$E^* = p^\mu u_\mu = m_t u^0 - p_t u,$$

supondo que a velocidade máxima do fluido pode depender também de ϕ . Resulta então a relação de proporcionalidade:

$$\frac{dN}{p_t dp_t dp_z d\phi} \propto \exp\left(\frac{-m_t u_0(\phi) + p_t u(\phi)}{T}\right).$$

De acordo com a equação:

$$v_x = \frac{c_s^2 x}{\sigma_x^2} t, \quad v_y = \frac{c_s^2 y}{\sigma_y^2} t.$$

a velocidade do fluido é maior no eixo x do que no eixo y , no fenômeno observável experimentalmente como **fluxo elíptico**. Esse efeito pode ser parametrizado, por exemplo, da forma seguinte:

$$u(\phi) = U + 2\alpha \cos 2\phi,$$

onde α é um coeficiente real positivo que caracteriza a intensidade do fluxo transversal, e U é a média, calculada sobre ϕ , da velocidade máxima do fluido no sentido de ϕ . Nas colisões quase centrais Au+Au no RHIC, os dados experimentais sugerem que $\alpha \approx 4\%$, o que significa que o fluxo elíptico é um efeito pequeno no interior do fluido. Considerando que $u^0 = \sqrt{u^2 + 1}$, e fazendo a expansão até a primeira ordem em α , obtemos:

$$u^0(\phi) = U^0 + 2v\alpha \cos 2\phi,$$

onde $v \equiv U/U_0$ é a velocidade máxima do fluido.

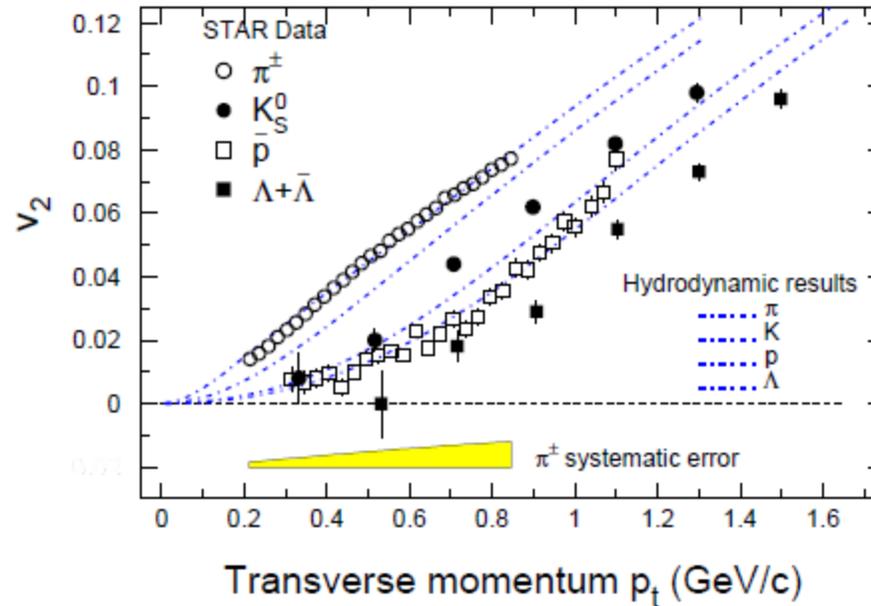
Juntando agora as três últimas equações, expandindo até a primeira ordem em α , e comparando com a decomposição de Fourier da distribuição azimutal:

$$\frac{dN}{d\phi} \propto 1 + 2v_2 \cos 2\phi.$$

obtemos finalmente o valor do fluxo elíptico v_2 :

$$v_2 = \frac{\alpha}{T} (p_t - vm_t).$$

Esta equação expõe as propriedades essenciais do fluxo elíptico diferencial das partículas identificadas na figura abaixo:



Para partículas leves, como píons, $m_t \approx p_t$, e v_2 cresce essencialmente de forma linear com p_t . Este resultado é certamente não trivial. Para partículas mais pesadas, m_t é maior para um mesmo valor de p_t , resultando em um valor menor para v_2 . Essa rígida ordenação de massas é vista de forma clara nos dados experimentais: káons e prótons têm menores v_2 do que píons com o mesmo p_t . A última equação mostra que a ordenação de massas somente é significativa quando v é uma fração significativa da velocidade da luz. Portanto, os dados obtidos pelo RHIC sobre v_2 podem ser considerados como uma forte evidência de um fluxo coletivo **relativístico**. Os ajustes dos resultados teóricos aos dados experimentais sugerem que a velocidade máxima do fluido pode chegar a $0,7c$.

6. VISCOSIDADE E TERMALIZAÇÃO

6.1. TIPOS DE FLUXOS

Os vários tipos de fluxos da mecânica dos fluidos são classificados de acordo com alguns parâmetros adimensionais, dos quais só nos interessa o número de Knudsen $Kn = \lambda/R$, que expressa a razão entre o livre caminho médio λ de uma partícula entre duas colisões em um sistema com uma distância característica R . Para que a hidrodinâmica seja aplicável, é necessário que $Kn \ll 1$, o que está de acordo com todas as suposições utilizadas no conteúdo anterior.

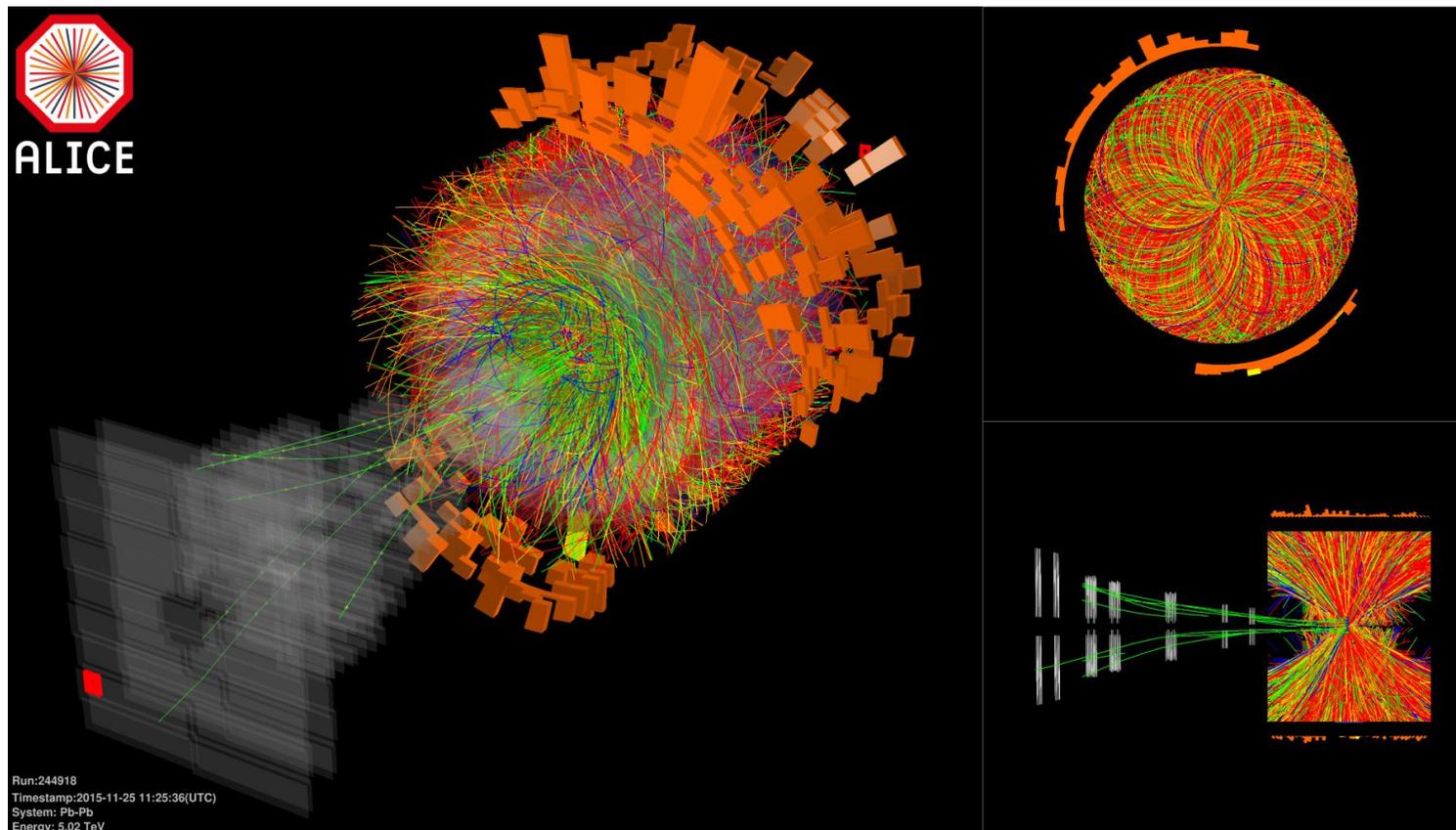
6.2. CORREÇÕES DA VISCOSIDADE

Atualmente, a questão de se definir se a hidrodinâmica é ou não aplicável às colisões de íons pesados não é mais qualitativa, e sim quantitativa. Como o objetivo da hidrodinâmica viscosa é produzir uma descrição mais acurada das colisões de íons pesados, a meta é fazer as correções a essa visão simplificada do fluido ideal. As correções esperadas aos experimentos do RHIC são estimadas entre 10% e 30%. Foi publicado recentemente um trabalho que avança nesse estudo (*Relativistic Dissipative Hydrodynamic Description of QGP* (Akihiko Monnai)- Springer Theses 2014).

A hidrodinâmica invíscida não é capaz de reproduzir quantitativamente todos os dados experimentais. Espera-se que o experimento ALICE no LHC, pelo simples fato de que, devido à energia mais alta das colisões – 13 TeV por núcleon com carga elétrica, ou efetivos 1045 TeV > 1 PeV = 1 peta-elétronvolt, em colisões ${}^{208}_{82}\text{Pb} + {}^{208}_{82}\text{Pb}$, a longevidade do QGP será maior, lance mais luz sobre os limites das correções da viscosidade. E contribua para a teoria necessária à descrição mais acurada dos processos físicos envolvidos.

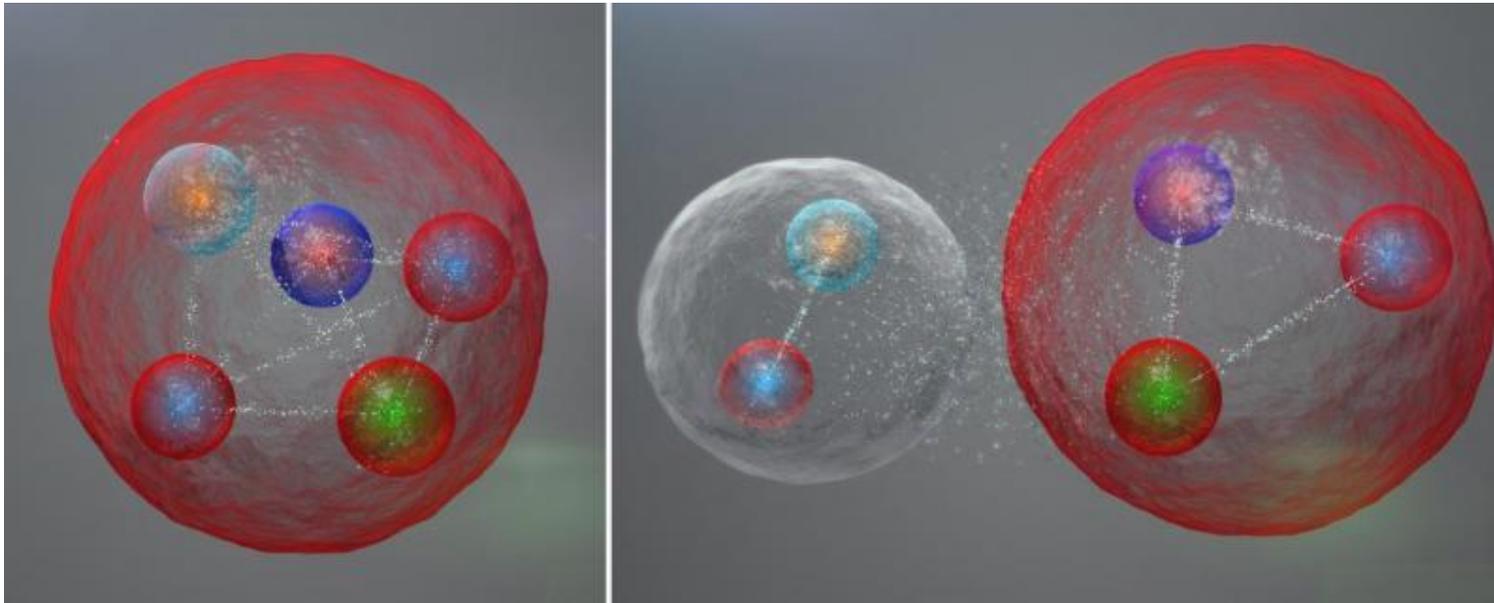
7. O EXPERIMENTO ALICE

Depois de ficar desativado por dois anos para manutenção e modificações para incremento da luminosidade, em 17 de novembro de 2015 o LHC começou a fazer colidir íons de chumbo, Pb+Pb, a uma energia recorde de 13TeV , o que equivale a uma temperatura de $1,3 \times 10^{17}\text{K}$, ou 100 petakelvin (a temperatura na superfície do Sol é de 5.778K , e no seu núcleo, de até $1,5 \times 10^7\text{K}$). Abaixo, uma imagem computadorizada de um evento de colisão Pb+Pb registrado em 25/11/2015:



A energia máxima atingida no RHIC fica em torno de $4 \times 10^{12} K$, cinco ordens de grandeza inferior à do ALICE. Por isso, espera-se que a análise computacional dos dados que estão sendo gerados nessa fase 2 do experimento lance mais luz sobre a natureza física do QGP, do CGC, o *color glass condensate*, e do GLASMA, possivelmente um estágio da matéria composta por quarks e glúons, fortemente interagentes e ainda não termalizados, precursor do QGP.

O ALICE é apenas um dos quatro grandes experimentos realizados no LHC. Os outros três são o ATLAS (*A Toroidal LHC Apparatus*), o CMS (*Compact Muon Solenoid*) e o LHCb. Após o reinício das colisões próton-próton em maio de 2015, foi descoberta em julho, no experimento LHCb (*LHC-beauty*), que detecta as trajetórias de quarks *b* (*beauty* ou *bottom*), a primeira partícula exótica composta por cinco quarks – o **pentaquark** -, até então apenas uma possibilidade teórica. Ainda não se sabe se os eventos se dão com uma partícula apenas com 5 quarks, ou com um sistema ligado composto de um núcleon (3 quarks) e um méson (1 quark + 1 antiquark).



CONDENSADO DE VIDRO DE COR (CGC) E ESPALHAMENTO EM ALTAS ENERGIAS NA QCD

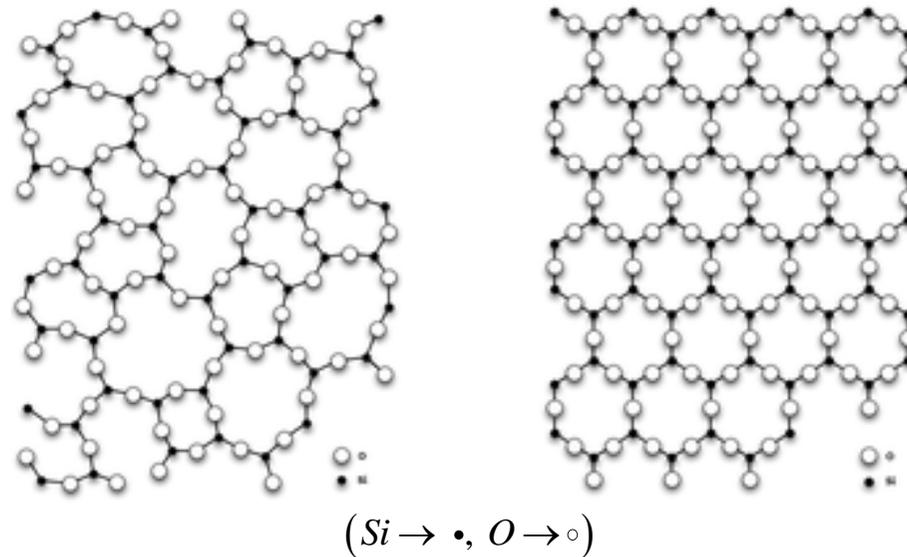
1. INTRODUÇÃO

A entrada em atividade de uma nova geração de colisores de alta energia no século XXI fez despertar uma nova era no estudo das interações nucleares fortes. Questões aventadas desde os dias iniciais das pesquisas, como o comportamento das seções de choque em altas energias, a universalidade das interações hadrônicas, a natureza da produção múltipla de partículas, e a possibilidade de criação de estados termalizados de matéria fortemente interagente ganharam novo vigor. Por exemplo, acreditava-se com frequência que pouco poderia ser aprendido sobre o limite de altas energias da QCD, uma vez que a física estaria inteiramente na região não perturbativa, inacessível, portanto, às ferramentas grandemente desenvolvidas, e com enorme sucesso, na QED, por Feynman, Schwinger, Tomonaga, Bjorken, e outros. Descobriu-se, porém, ainda na década de 1990, que as densidades dos pártons são elevadas em altas energias, ou, equivalentemente, para valores pequenos da variável x de Feynman (ou x_{Bj} de Bjorken, como veremos). Essas densidades elevadas de pártons com pequeno x , ou mini-pártons (*wee partons*), sugerem que podem estar presentes escalas semifortes que permitam a descrição da física nesse regime usando-se técnicas de acoplamento fraco. Assim, a QCD em altas energias pode ser descrita como uma teoria de muitos pártons fracamente acoplados, embora de forma não perturbativa, devido exatamente ao grande número de pártons. Um sistema como esse é chamado de Condensado de Vidro de Cor (CGC) pelas seguintes razões:

“Cor”, uma vez que esta é a “carga de calibre” dos glúons.

“Vidro”, por causa da forte analogia do sistema a vidros reais. Um vidro é um sistema desordenado – um **coloide** - que evolui em relação a escalas de tempo naturais. Em escalas temporais curtas (de segundos a alguns anos) comporta-se como um sólido rígido, e escalas muito mais longas (de séculos em diante), flui como um líquido. É conhecida a técnica de datação de construções muito antigas (igrejas góticas, por exemplo) pela medição acurada da diferença vertical de espessura dos seus vitrais: esses são mais grossos nas partes inferiores, pois o vidro “escorreu” ao longo de séculos. De forma semelhante, os pártons estudados estão desordenados e evoluem segundo o momentum longitudinal analogamente a um vidro.

Abaixo, ilustrações esquemáticas do arranjo dos átomos em um vidro - SiO_2 amorfo - e em um cristal de quartzo - SiO_2 cristalino:



“Condensado” porque o sistema contém uma elevada densidade de glúons de massa nula, cuja distribuição dos momentos lineares exibe um pico em torno de um momentum característico. Incrementando a energia, os glúons são forçados a ocupar estados de momentum mais altos, devido às interações repulsivas, enfraquecendo assim o acoplamento mútuo. A densidade gluônica é saturada em um valor de $1/\alpha_s \gg 1$ (sendo α_s a constante corrente de acoplamento forte), correspondendo a um estado BEC com múltiplas partículas. Será visto a seguir que o CGC é a teoria efetiva que descreve o espalhamento na QCD de energias ultrarrelativísticas.

2. QUESTÕES FENOMENOLÓGICAS NA QCD DE ALTAS ENERGIAS

2.1. COMPORTAMENTO EM ALTAS ENERGIAS DE SEÇÕES DE CHOQUE TOTAIS

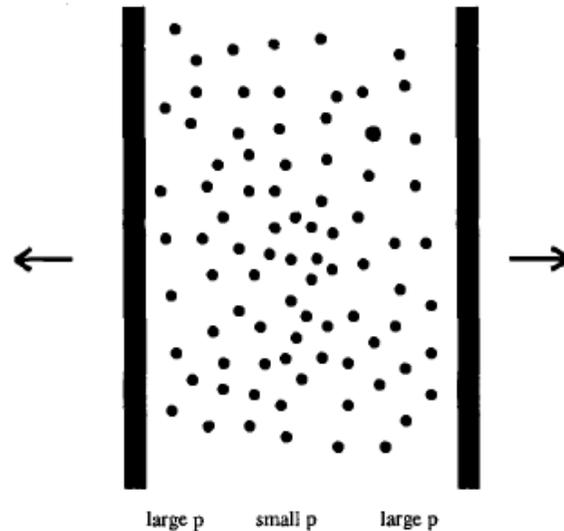
O cálculo de seções de choque totais no limite $E \rightarrow \infty$ é um dos grandes problemas da QCD ainda sem solução. Diferentemente dos processos calculados em teoria de perturbações, não é exigido que ocorram grandes transferências de energia nesse limite. Portanto, o cálculo de uma seção de choque total em um espalhamento hadrônico parece ser um procedimento intrinsecamente não perturbativo. Nos anos 1960-1970, a teoria de espalhamento de Regge (o físico italiano Tullio Regge, 1931-2014) foi intensamente desenvolvida, assim como a matriz-S, em uma tentativa de entender a seção de choque total. Hoje os resultados dessas análises se mostram inconclusivos, e, de qualquer modo, não podem ser extraídos de primeiros princípios da QCD.

Baseando-se em argumentos bem gerais, envolvendo unitariedade, analiticidade, e outras hipóteses, Marcel Froissart (físico francês, 1934-2015) mostrou em 1961 que a seção de choque total para as interações fortes deve crescer como $\ln^2 E$ quando $E \rightarrow \infty$. Esse resultado levanta várias questões: 1. Será o coeficiente de $\ln^2 E$ universal para todos os processos hadrônicos? 2. Esse coeficiente pode ser calculado a partir dos primeiros princípios da QCD? 3. Como entender dinamicamente, na QCD, a saturação no limite de unitariedade? 4. O limite de Froissart é um fenômeno intrinsecamente não perturbativo?

A seguir, esboçaremos algumas respostas a essas questões.

2.2. PRODUÇÃO MÚLTIPLA DE PARTÍCULAS NA QCD

É possível, na QCD, se calcular $N(E)$, a multiplicidade total de partículas produzidas, como sendo uma função da energia? Isto não significa apenas a multiplicidade de partículas em jatos – o que é bem descrito pela QCD perturbativa -, mas também o número total de partículas, ao menos para momentos lineares semifortes. Consideremos a colisão entre dois hádrons idênticos no referencial do centro de massa, como ilustra a figura abaixo.



Os hádrons que colidem são ultrarrelativísticos, logo, sofrem a contração de Lorentz na direção do movimento. Assumiremos também que os momentos transversos típicos das partículas produzidas são grandes, se comparados com $\Lambda_{QCD} \sim 217 MeV$, o **parâmetro de escala** da QCD, ou **escala de confinamento** – a essa energia a constante de acoplamento α_s diverge. Sabe-se dos experimentos que as partículas principais (pártons de valência) perdem na colisão, tipicamente, somente uma fração finita de seu momentum. As partículas produzidas, na sua maioria mésons ($q\bar{q}$), surgem na “esteira” dos núcleos, depois que estes se atravessam. Em coordenadas LC, a partícula que se direciona à direita (“projétil”) possui

um momentum $p_1^\mu = (p_1^+, p_1^-, 0_\perp)$, sendo $p_1^+ \approx \sqrt{2}p_z$ e $p_1^- \approx M^2/2\sqrt{2}p_z$ (uma vez que $p_z \gg M$ e $m_\perp \gg M$, onde $M =$ massa do projétil). Da mesma forma, para o hádron que se direciona à esquerda (o “alvo”), temos que $p_2^+ = p_1^-$ e $p_2^- = p_1^+$. A energia invariante será igual a $s = (p_1 + p_2)^2 = 2p_1 \cdot p_2 \approx 2p_1^+ p_2^- \approx 4p_z^2$, e coincide, como esperado, com o quadrado da energia total $(E_1 + E_2)^2$ no referencial do centro de massa.

Vamos considerar um pión produzido nessa colisão, movendo-se no sentido positivo do eixo z . Para este pión, definimos a **fração de momentum longitudinal**, ou o x de Feynman, como:

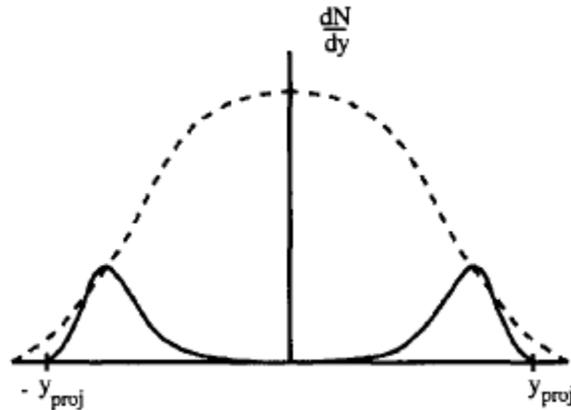
$$x \equiv \frac{p_\pi^+}{p_1^+}$$

Isto implica $m_\perp/\sqrt{2}p_1^+ \leq x \leq 1$. A **rapidez** do pión será, portanto:

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{p_\pi^+}{p_\pi^-} = \frac{1}{2} \ln \frac{2p_\pi^{+2}}{m_\perp^2} = y_{proj} - \ln \frac{1}{x} + \ln \frac{M}{m_\perp},$$

onde $y_{proj} = \ln(\sqrt{2}p_1^+/M) \approx \ln(\sqrt{s}/M)$, e seu domínio se localiza em $0 \leq y \leq y_{proj} + \ln(M/m_\perp)$. Para um pión que se move no sentido contrário, teremos definições similares, apenas permutando p^+ com p^- .

Resulta um domínio simétrico para y , como mostra a figura. Todos os píons são produzidos com uma distribuição de rapidez dentro desse domínio.



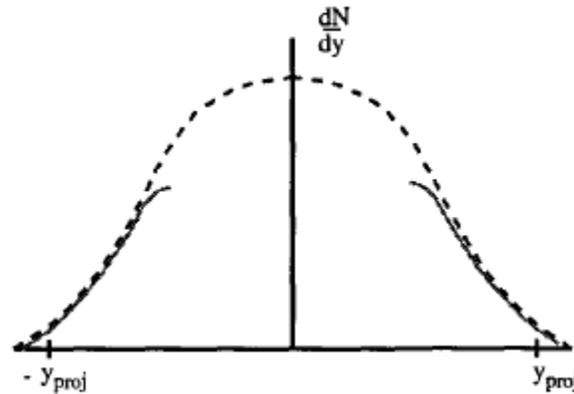
Nesta figura, dN/dy é o número de partículas produzidas por unidade de rapidez. As partículas participantes da colisão (os partons de valência) são mostradas na linha cheia, e estão agrupadas em torno das rapidez dos projéteis e dos alvos. Por exemplo, em uma colisão entre íons pesados, é aí que os núcleons devem estar. A linha tracejada mostra a distribuição dos mésons produzidos.

A produção de partículas múltiplas levanta várias questões teóricas. Pode-se calcular dN/dy ? Mesmo apenas em $y=0$? Como o momentum transversal médio das partículas produzidas, $\langle p_{\perp} \rangle$, se comporta com a energia? Qual é a proporção entre mésons com/sem estranheza produzidos, e as proporções correspondentes aos quarks/antiquarks charm, bottom, top, em $y=0$, quando a energia no centro de massa se aproxima de infinito? Será a produção de partículas múltiplas quando $s \rightarrow \infty$ em $y=0$ analisável, calculável e simples?

Observe-se que $y=0$ corresponde a partículas com $p_z=0$ ou $p^+ = m_{\perp}/\sqrt{2}$, para as quais $x = m_{\perp}/(\sqrt{2}p_1^+) = m_{\perp}/\sqrt{s}$ é pequeno, $x \ll 1$, no limite de altas energias de interesse. Logo, a produção de partículas múltiplas na rapidez central reflete

as propriedades dos graus de liberdade das funções de onda dos hádrons que colidem, na escala de energia em que x é pequeno.

Existe uma característica digna de nota das distribuições de rapidez de hádrons produzidos, conhecida geralmente como “lei de escala de Feynman”. Se plotarmos distribuições de rapidez de hádrons produzidos em diferentes energias, sucede que, enquanto funções de $y - y_{proj}$, essas distribuições se mostram, em boa aproximação, independentes da energia. Isto pode ser ilustrado na figura abaixo, onde a distribuição de rapidez medida em uma dada energia está mostrada na linha cheia, e a distribuição de rapidez em uma energia diferente e maior corresponde à linha tracejada.



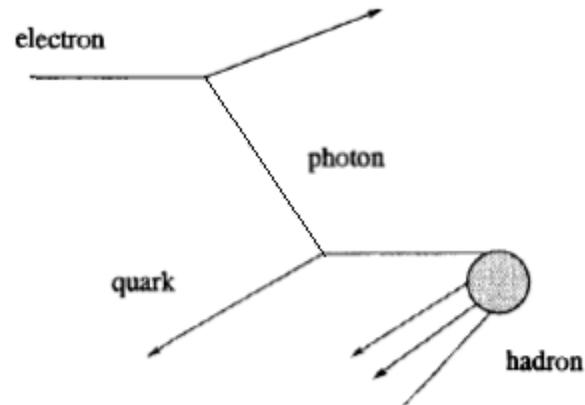
Na figura, a distribuição à energia inferior foi deslocada de maneira a que partículas com rapidez positiva iniciam sua curva de distribuição na mesma y_{proj} onde principia a curva da distribuição das partículas com energia superior – o mesmo vale para as partículas com rapidez negativa. Visivelmente, isto leva a um afastamento na região central para as partículas com menor energia. Isto quer dizer que, à medida que aumentamos mais e mais a energia, a nova física está associada com os graus de liberdade adicionais que surgem nas rapidezzes pequenas (os graus de liberdade para pequeno x).

Os graus de liberdade para grandes valores de x não mudam muito. Isto sugere, portanto, que pode existir alguma forma de descrição em termos de RG (grupo de renormalização) para a rapidez, onde os graus de liberdade para grandes valores de x permanecem constantes, como um ponto fixo, enquanto a energia aumenta no sentido de pequenos valores de x . Veremos

mais adiante que, na verdade, esses graus de liberdade para grandes x atuam como fontes de campo para os graus de liberdade dos pequenos x , e o RG é gerado pela integração dos graus de liberdade para relativamente grandes valores de x para gerar essas fontes. Uma vez isso entendido, estaremos aptos a calcular o número e a distribuição das partículas produzidas na região de rapidez central.

2.3. DIS – ESPALHAMENTO INELÁSTICO PROFUNDO

Vamos agora especializar a discussão para analisar o DIS, no caso do espalhamento de um lépton incidente, como projétil, sobre um hádron, como alvo. No DIS são produzidas poucas partículas, o que fornece um ambiente relativamente simples para o estudo da QCD em altas energias. A figura abaixo ilustra esquematicamente um experimento de DIS.



Para descrevermos distribuições de quarks é conveniente trabalhar em um referencial no qual o hádron tenha um momentum longitudinal grande, $P^+ \gg M$. Esse referencial é definido como o **referencial de momentum infinito**. Nele, podemos descrever o hádron como uma coleção de partículas constituintes (pártons), que podem ser consideradas aproximadamente como excitações on-shell portadoras de uma fração x do momentum total P^+ . Esta descrição pode ser formulada matematicamente através da quantização nas coordenadas LC, como mostrado anteriormente. Portanto, o momentum longitudinal de um párton será dado por $p^+ = xP^+$, onde $0 \leq x \leq 1$.

No caso do quark alvo na figura acima, essa variável x , o x de Feynman, é idêntico, a menos de correções de massa do alvo, ao x_{Bj} de Bjorken, que é definido, independentemente do referencial, como $x_{Bj} = Q^2 / 2P \cdot q$. Nesta definição, $Q^2 = -q^\mu q_\mu$, onde q^μ é o quadrimomento, do tipo espaço, do fóton permutado. A variável de Bjorken segue a lei de escala $x_{Bj} \sim Q^2 / s$, em que s é o quadrado da energia invariante. Assim, no DIS em altas energias, isto é, s grande para um Q^2 fixo, medimos a distribuição de quarks dN_{quark} / dx para valores pequenos de x ($x \ll 1$).

Pensemos novamente nessas distribuições como funções da rapidez. Para o DIS, podemos definir a rapidez como $y = y_{hadron} - \ln(1/x)$, e a distribuição invariante de rapidez como $dN/dy = x dN/dx$. Para valores elevados de Q^2 , as funções de distribuição de quarks e glúons medidas serão relacionadas de forma simples – pelo menos em uma aproximação de ordens mais significativas – ao número de pártons por unidade de rapidez na função de onda hadrônica.

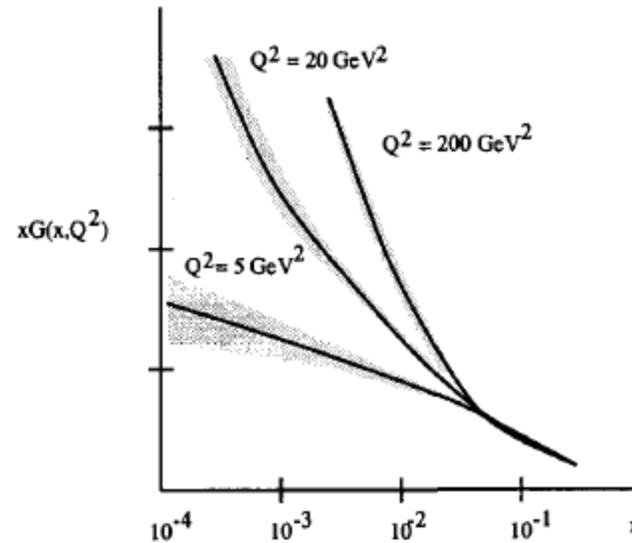
Os experimentos DIS mostram que a distribuição dN/dy típica para os glúons constituintes de um hádron é similar à distribuição de rapidez de partículas produzidas nas colisões hádron+hádron. O que sugere um relacionamento entre ES funções de estrutura no DIS e as distribuições de rapidez para partículas produzidas em colisões hadrônicas. Espera-se que a função de distribuição de glúons seja proporcional à função de distribuição de rapidez de píons. É uma hipótese plausível, desde que os graus de liberdade dos glúons não se percam, e está incorporada em muitos modelos de produção múltipla de partículas.

O problema dos valores pequenos de x surge, por exemplo, em experimentos ainda nos anos 1990, em que as funções de distribuição de rapidez para quarks e para glúons cresce rapidamente quando a diferença de rapidez:

$$\tau \equiv \ln(1/x) = y_{hadron} - y$$

entre o quark e o hádron aumenta.

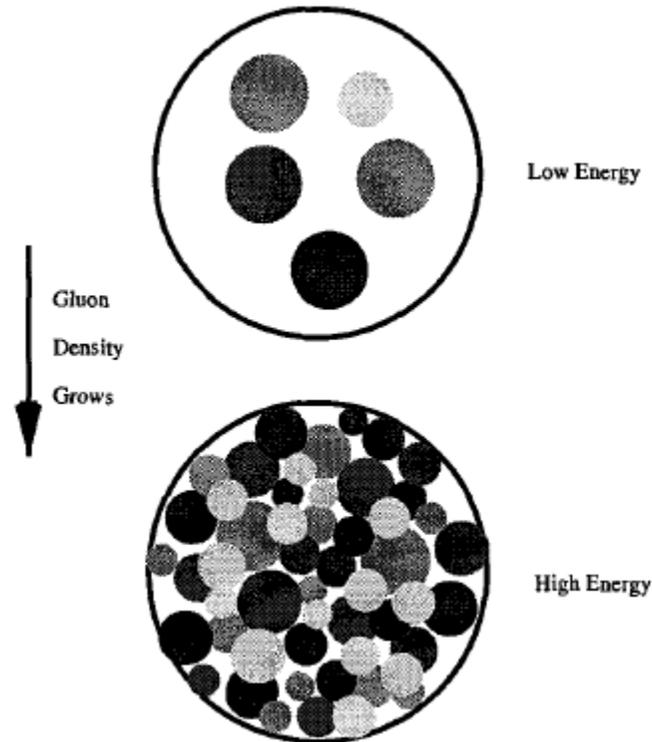
A figura ilustra a plotagem dos dados de um experimento, feito em 1999, das curvas de distribuição de glúons para $Q^2 = 5\text{GeV}^2$, $Q^2 = 20\text{GeV}^2$ e $Q^2 = 200\text{GeV}^2$.



A distribuição de glúons é o número de glúons por unidade de rapidez na função de onda do hádron, $xG(x, Q^2) = dN_{gluons}/dy$. Experimentalmente, esses dados são extraídos dos dados para as funções de estrutura dos quarks, depois da análise da dependência dessas últimas em relação à resolução em Q^2 do lépton incidente. Uma visão esquemática desse crescimento, como a feita acima, já mostra que parece mais rápido do que τ ou τ^2 . Considerações perturbativas sobre o limite de altas energias na QCD, feitas por Lipatov e colaboradores levaram a uma equação de evolução comumente chamada de equação BFKL (Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov), que sugere que essas distribuições podem crescer como $\exp(\tau)$. Alternativamente, a equação de evolução DGLAP (Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi), duplamente logarítmica, prediz um crescimento mais lento, algo como uma exponencial em $\sqrt{\tau}$. Mas essas duas equações evolutivas

levam, assintoticamente, a predizer um crescimento das distribuições que excederiam o limite da unitariedade de Froissart citado anteriormente.

Como compreender, à luz da QCD, o problema do aumento rápido das distribuições de glúons para pequenos valores de x ? Observemos a geometria da figura abaixo, segundo a qual estaríamos visualizando o hádron segundo o eixo z de colisão. Os constituintes são os quarks de valência, glúons e quarks virtuais, representados por círculos de cores diferentes. À medida que adicionamos mais constituintes, a “população” dos hádrons aumenta mais e mais.



Se usarmos o DIS para identificar esses constituintes, haverá um x suficientemente pequeno, para uma dada resolução transversa, em que a densidade dos constituintes se torna tão elevada que não se poderá negar mais as suas interações mútuas. O que resultará em um efeito de “sombreamento”, que significa o decréscimo da seção de choque do espalhamento relativamente ao esperado em um espalhamento incoerente entre partículas não interagentes.

Posto de forma mais precisa, veremos adiante que, como efeito dessas interações, as funções de distribuição dos pártons para um valor fixo de Q^2 , atingem um ponto de **saturação**, no sentido de exibirem apenas um aumento lento, logarítmico, com $1/x$. Para um dado Q^2 , essa saturação ocorre quando x é suficientemente baixo, inferior a um valor crítico $x_s(Q^2)$. Ao contrário, para um x fixo, essa saturação ocorre para momentos transversos abaixo de um valor crítico $Q_s^2(x)$, definido por:

$$Q_s^2(x) = \alpha_s N_c \frac{1}{\pi R^2} \frac{dN}{dy},$$

onde dN/dy é a distribuição de glúons com rapidez $y = y_{hadron} - \ln(1/x)$. Somente glúons participam, uma vez que, em altas energias, a densidade de glúons cresce muito mais rápido que a densidade de quarks, e essa é a característica que leva à saturação. Isto explica porque centraremos o foco nos glúons, primariamente. Na equação acima, πR^2 é a área do hádron no espaço do parâmetro de impacto, ou, equivalentemente, no plano transversal. Essa expressão, que será adotada daqui para frente, é bem definida se o comprimento de onda da partícula incidente é pequeno, se comparado com o raio R do hádron. E, finalmente, $\alpha_s N_c$ é o quadrado da carga de cor de um glúon. Podemos então interpretar aquela equação, que representa a “escala de saturação”, como o quadrado da carga de cor média dos glúons, por unidade de área e unidade de rapidez.

Uma vez que a distribuição dos glúons cresce rapidamente com a energia, como os dados indicam, a escala de saturação também cresce. Para uma energia suficientemente alta, ou um x suficientemente pequeno,

$$Q_s^2(x) \gg \Lambda_{QCD}^2,$$

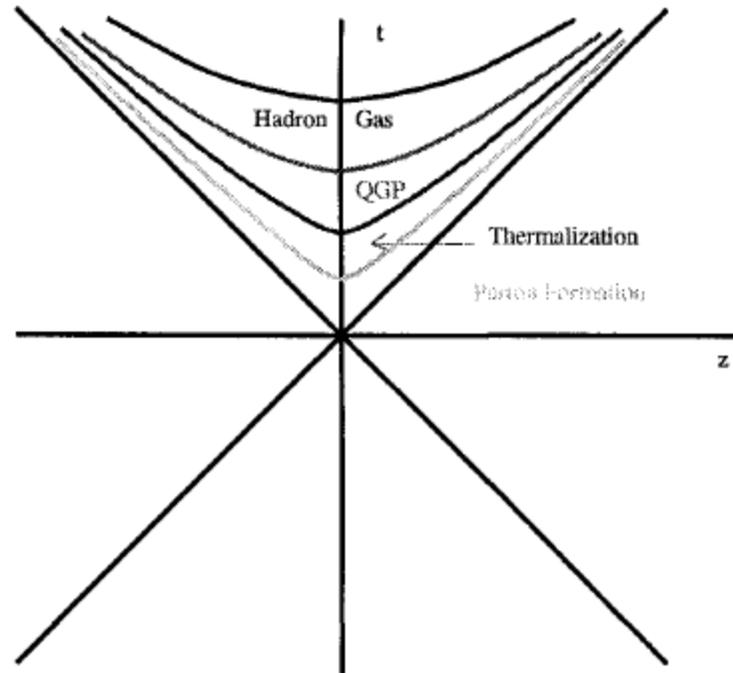
com $\alpha_s(Q_s^2) \ll 1$. Considerando que $\Lambda_{QCD}^2 \approx 4,8 \times 10^{-2} GeV^2$, podemos supor que as técnicas para acoplamento fraco podem ser usadas no estudo do regime de altas energias na QCD.

Ao contrário do que possa parecer, porém, um acoplamento fraco não significa necessariamente que a física seja perturbativa. Existem muitos exemplos de fenômenos não perturbativos com acoplamento fraco, como a física atômica de núcleos com alta carga elétrica, ou grande número de prótons. Embora a constante de acoplamento eletromagnético, ou constante de estrutura fina, seja muito fraca, $\alpha_{em} \sim 1/137 \ll 1$, a grande carga nuclear Z dos átomos introduz uma escala $Z\alpha_{em} \sim 1$, que produz um forte campo coulombiano no qual o elétron se propaga. Há, porém, técnicas sistemáticas que permitem que se calculem as propriedades não perturbativas de átomos com número atômico Z elevado. Outro exemplo é o da própria QCD em altas temperaturas, $T \gg \Lambda_{QCD}$, quando se forma um QGP fracamente acoplado, mas que exhibe propriedades não perturbativas a grandes distâncias $r \gg 1/T$, devido ao comportamento coletivo de grande número de pártons.

De forma análoga, os glúons com pequeno x e momentum transversal $Q^2 \leq Q_s^2(x)$ compõem um sistema com alta densidade, no qual a probabilidade de interação $\sigma \times n$ (onde $\sigma \sim \alpha_s/Q^2$ é a seção de choque típica de um párton, e n é a densidade gluônica, $n = (dN/dy)/\pi R^2$) é da ordem da unidade. Isto significa que, se o acoplamento é fraco, $\alpha_s(Q_s^2) \ll 1$, os efeitos das interações são amplificados pela alta densidade de glúons, e a teoria de perturbações usual não é mais válida, fazendo-se necessária uma ressonância dos efeitos da alta densidade. O procedimento a ser apresentado a seguir consiste em construir-se uma **teoria efetiva** – o Condensado de Vidro de Cor – na qual os glúons com pequeno x são descritos com os campos clássicos de cor emitidos pelas “fontes de cor” com rapidez mais alta. Fisicamente, essas fontes são interpretadas como os pártons “rápidos”, isto é, os constituintes dos hádrons com maior momentum longitudinal $p^+ \gg xP^+$. As propriedades dessas fontes de cor serão obtidas via uma análise de grupo de renormalização (RG), da seguinte forma: os pártons “rápidos” são “extraídos por integração” (*integrated out*) para cada nível de rapidez, no ambiente de fundo do campo clássico gerado pelo nível anterior.

2.4. COLISÕES NÚCLEO-NÚCLEO (N + N) E PRÓTON-NÚCLEO (P + N)

Vemos mais uma vez, na figura abaixo, um esquema da evolução espaço-temporal de uma colisão entre íons pesados.



Imaginemos dois núcleos, lorentzianamente contraídos, aproximando-se à velocidade da luz. Escolhemos as coordenadas de forma tal que a colisão ocorre em $z = t = 0$, ou seja, em $x^+ = x^- = 0$. Como os dois núcleos estão bem localizados na direção longitudinal, podemos considerar o que se dirige à direita em $z \simeq t$ ($x^- = 0$), o que se move para a esquerda em $z \simeq -t$ ($x^+ = 0$).

Para analisar este problema em $t \geq 0$, isto é, após a colisão, é conveniente introduzir uma variável temporal que seja invariante de Lorentz sob boosts longitudinais, o **tempo próprio** $\tau = \sqrt{t^2 - x^2}$, e uma nova variável, rapidez no espaço-tempo, um pouco diferente da rapidez no espaço de momentos vista anteriormente, definida como:

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{x^+}{x^-}.$$

Para partículas livres com velocidade v_z ($z = v_z t = (p_z/E)t$), essa rapidez no espaço-tempo é igual à rapidez y no espaço de momentum:

$$y \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{p^+}{p^-} = \frac{1}{2} \ln \frac{2p^+2}{m_{\perp}^2}.$$

Essa identificação permanece aproximadamente verdadeira também para as flutuações quânticas virtuais (os pártons) que possuam momentum longitudinal relativamente grande.

Em altas energias, na região central de rapidez, as distribuições de partículas variam lentamente, e pode ser uma boa aproximação considerá-las invariante com a rapidez, e, portanto, também independentes de η . Logo, as distribuições se conservam as mesmas sobre as linhas de tempo próprio τ constante, as hipérbolas mostradas na figura anterior.

Um problema essencial é o de formular as condições iniciais para uma colisão de íons pesados, para estudar a evolução subsequente dos pártons produzidos. Será possível deduzir de primeiros princípios que a matéria partônica se termalizará, transformando-se em um QGP?

Apresentam-se aí duas classes distintas de problemas que temos de entender antes de formular essas condições iniciais. Primeiramente, os dois núcleos que colidem são pacotes de onda quânticos coerentes. Por conta disso, em tempos anteriores, os graus de liberdade estarão obrigatoriamente definidos pela mecânica quântica. Em particular, pelo princípio da incerteza:

$$\Delta z \Delta p_z \geq 1,$$

que impõe vínculos aos glúons com pequeno x , os quais se encontram deslocalizados sobre grandes distâncias longitudinais $\Delta z \sim 1/p_z$, superpondo-se assim uns aos outros, como ondas planas. Esses graus de liberdade não podem ser descritos por teorias de transporte relativas a **partículas**, por seu caráter eminentemente ondulatório. Em outras palavras, uma partícula clássica é caracterizada por uma função de distribuição $f(\vec{p}, \vec{x}, t)$, que depende simultaneamente de momentum e coordenada. Contudo, e para felicidade geral, estados quânticos coerentes podem ser descritos com **campos** clássicos, por possuírem números de ocupação elevados $\sim 1/\alpha_s \gg 1$. Nesse limite, os comutadores de Heisenberg entre operadores de criação e aniquilação se tornam desprezíveis:

$$[a_k, a_k^\dagger] = 1 \ll a_k^\dagger a_k = N_k.$$

A teoria clássica de campos é também a linguagem apropriada para se descrever outra propriedade importante das condições iniciais: a coerência de carga clássica. Nos tempos muito anteriores à colisão, o que temos é um número tremendamente grande de partículas comprimidas em uma escala longitudinal de tamanho inferior a $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$, devido à contração de Lorentz atuante sobre o núcleo. E sabemos que, nessas escalas, as partículas não podem interagir de forma incoerente. Por exemplo, se medirmos o campo criado por duas cargas opostas (um dipolo) numa escala de distância r muito maior que a separação entre elas, o campo cai em proporção a $1/r^2$, e não a $1/r$.

O CGC pode ser aplicado, como uma teoria efetiva para pequeno x , para estudarmos os estágios iniciais de uma colisão entre íons pesados. As únicas escalas envolvidas no problema são a escala de saturação Q_s e o tamanho transversal R do sistema. Em uma escala de tempo $\tau \sim 1/Q_s$, a energia inicial e as distribuições de quantidade de glúons podem ser obtidas pela resolução de equações de campos clássicos. Em tempos posteriores $\tau \gg 1/Q_s$, o sistema se dilui, e a aproximação clássica deixa de valer, passando a ser possível, porém, uma aproximação em termos de equações de transporte. Presume-se que exista uma região de sobreposição onde ambas as aproximações possam ser válidas. Em tempos anteriores à colisão, a distribuição de glúons no espaço dos momentos é essencialmente transversal. À medida que o sistema vai se diluindo, os glúons começam a ser espalhados “fora do plano transversal”. Saber se as distribuições iniciais de glúons fora do equilíbrio termalizam, ou não, para formar o QGP nessas altas energias, é de importância fenomenológica capital nos experimentos sendo realizados no RHIC e no LHC.

2.5. UNIVERSALIDADE DO ESPALHAMENTO EM ALTAS ENERGIAS

Na produção de píons se observa que, com exceção de grandezas conservadas globalmente, como energia e carga total, as correlações de rapidez são de curto alcance. Admitindo que a teoria é local quanto à rapidez, o único parâmetro dimensional que pode determinar a física a uma dada rapidez é $Q_s^2(x)$. Em uma teoria aproximadamente invariante de escala como a QCD, o momentum transversal típico de um constituinte será, portanto, da ordem de $Q_s^2(x)$. Se $Q_s^2 \gg 1/R^2$, onde R é o raio do hádron, a finitude do tamanho do hádron se torna irrelevante. Isto significa que, a um suficientemente pequeno x , todos os hádrons se igualam, são a mesma partícula. As propriedades específicas de um hádron – seu tamanho, seu peso atômico A , por exemplo – comparecem apenas na escala de saturação $Q_s^2(x, A)$.

Pode-se deduzir daí que pode existir alguma equivalência entre núcleos e prótons, pois quando seus valores de Q_s^2 são idênticos, a física deverá ser a mesma. A equação:

$$Q_s^2(x) = \alpha_s N_c \frac{1}{\pi R^2} \frac{dN}{dy}$$

sugere a seguinte parametrização empírica do momentum de saturação:

$$Q_s^2(x, A) \sim \frac{A^{1/3}}{x^\lambda}$$

A estreita faixa de valores para o parâmetro $\lambda \sim 0,2 - 0,3$ parece ser a que mais se adéqua aos resultados experimentais e aos cálculos teóricos.

Indo um pouco mais além, pode ser que para processos relativamente mais simples, como o DIS, os observáveis sejam funções universais da razão entre o momentum transferido Q^2 e a escala de saturação $Q_s^2(x, A)$. Esta possível característica, conhecida como **lei geométrica de escala**, já foi verificada para valores do x_{Bj} de Bjorken menores do que 0,01, em uma larga região de valores de Q^2 , entre $0,045 - 450 GeV^2$. É instigante também que essa lei de escala se estende a relativamente

altos valores de Q^2 , muito acima da escala de saturação $Q_s^2(x)$, sugerindo que o fenômeno da saturação de glúons em $Q^2 \leq Q_s^2(x)$ tenha também uma influência muito forte na física nesses altos valores de Q^2 .

As considerações anteriores sugerem como reconciliar a unitariedade da teoria com o crescimento da função de distribuição de glúons com pequeno x . O fato é que, quanto menor for x , maior será $Q_s(x)$, logo, os pártons típicos serão menores (*wee partons*). Portanto, na medida em que x decresce, embora esteja aumentando o número de glúons, os novos glúons serão cada vez menores. Um projétil de prova com resolução de tamanho transversa $\Delta x_\perp \sim 1/Q$ não detectará pártons menores do que sua resolução. Portanto, quando $Q < Q_s$, os novos pártons criados não irão contribuir para a seção de choque do hádron.

3. A TEORIA EFETIVA DO CGC

Antes de desenvolver o modelo CGC, é importante fazer uma breve revisão do que é uma **teoria efetiva de campos**. Essa classificação pode ser identificada desde o século XIX, na análise clássica do **Problema de Kepler**.

O problema que consiste em escrever os potenciais real e efetivo para um cometa, ou planeta, que se move no campo gravitacional do sol é conhecido como o **problema de Kepler**.

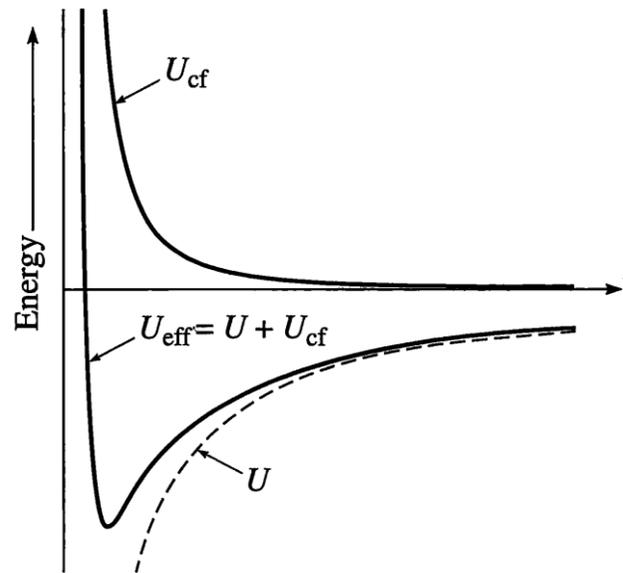
A energia potencial gravitacional do cometa é dada pela fórmula de Newton

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r},$$

onde G é a constante gravitacional universal, ou constante de Newton, e m_1, m_2 são as massas do cometa e do sol. A energia potencial efetiva é dada por

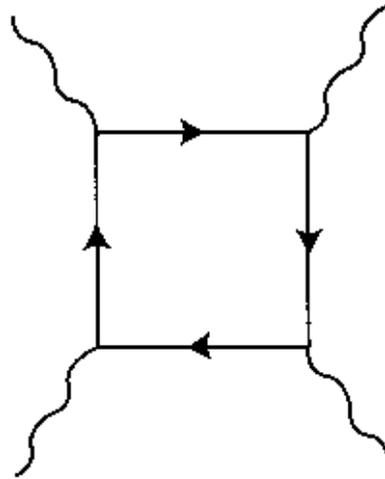
$$U_{ef}(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}.$$

O comportamento geral desse potencial efetivo é facilmente esquematizado na figura seguinte. Quando r é grande, o termo centrífugo $l^2/2\mu r^2$ é desprezível, se comparado ao termo gravitacional $-Gm_1m_2/r$, a energia potencial efetiva $U_{\text{ef}}(r)$ será negativa e crescente enquanto r cresce, e aceleração será contrária à inclinação da curva: quando o cometa está afastado, \ddot{r} aponta no sentido do sol. Quando r é pequeno, o termo centrífugo passa a ser dominante: quando o cometa está próximo do sol, a aceleração inverte o sentido, e o cometa começa a se afastar do centro novamente. A única exceção ocorre quando $l = 0 \therefore \dot{\theta} = 0$: o cometa está se dirigindo radialmente em direção ao centro do sol, e se chocará com ele.



Nesta análise, o potencial **real** newtoniano é substituído por um potencial **efetivo**, mais conveniente para a descrição **aproximada** do sistema, de acordo com a **escala de distância** r .

Na literatura da QFT, Steven Weinberg data dos anos 1935-1936 a primeira teoria efetiva, introduzida pelos físicos alemães H. Euler, B. Kockel e W. Heisenberg, uma teoria de interação fóton-fóton a energias muito menores que a energia de repouso do elétron (Weinberg, *Quantum Theory of Fields*, 1995, sec. 12.3).
 No diagrama de Feynman representado abaixo, linhas cheias são elétrons e linhas onduladas são fótons:



Naquela escala de energia, a contribuição deste diagrama é a mesma calculada pela **lagrangiana efetiva**:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{2\alpha^2}{45m_e^4} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2] \\
 + \text{higher orders in } \frac{eE}{m_e^2} \ \& \ \frac{eB}{m_e^2}$$

Na linguagem moderna, diz-se que o elétron é “extraído por integração”, pois na aproximação a um laço, temos:

$$\exp\left(i \int \mathcal{L}_{\text{eff}}(\mathbf{E}, \mathbf{B}) d^4x\right) = \int \left[\prod_x d\psi_e(x) \right] \exp\left(i \int \mathcal{L}_{\text{QED}}(\psi_e, \mathbf{A}) d^4x\right).$$

Em resumo, uma teoria efetiva é aquela que é considerada válida em determinadas escalas de energia, e não necessariamente representa a teoria fundamental – se esta existir. Por outro lado, observados seus limites, e os limites dos experimentos, uma teoria efetiva possibilita a realização de cálculos precisos, enriquecendo nosso conhecimento de fenômenos complexos, mesmo não partindo de primeiros princípios.

3.1. A FUNÇÃO DE ONDA HADRÔNICA PARA x PEQUENO

Como já foi visto, uma QFT quantizada no cone de luz exibe uma estrutura simples em termos dos pártons da teoria. Na QCD, por exemplo, os autoestados do hamiltoniano no cone de luz P_{QCD}^- podem ser expressos como uma superposição linear dos autoestados da parte não interativa do hamiltoniano $P_{QCD,0}^- = P_{QCD}^- - V_{QCD}$, onde V_{QCD} é o “potencial” LC. Desta forma, a função de onda do próton pode ser escrita, nessa base de pártons, como:

$$|\psi\rangle = c_1|qqq\rangle + c_2|qqqg\rangle + \dots + c_n|qqqggg\dots q\bar{q}gg\rangle + \dots.$$

Não é óbvio, a priori, se há alguma vantagem nesta decomposição. Contudo, a “mágica” do modelo de pártons é que, em altas energias, fica aparente pela estrutura de V_{QCD} que as interações mútuas entre os pártons são dilatadas no tempo pelo fator de Lorentz. Assim, a representação enormemente complicada do próton sendo espalhado por um potencial externo pode ser substituída pela visão simples do espalhamento de pártons individuais, com momentum infinito, por esse mesmo potencial – usando-se a aproximação semiclássica da eikonal, cada um dos pártons se propaga em linha reta, e adquire apenas uma fase no espalhamento. Em energias mais baixas, os estados de Fock envolvendo grande número de pártons não importam muito, mas tornam-se significativos à medida que a energia aumenta, e descrevem fundamentalmente glúons. Como o momentum total LC do próton, P^+ , se divide entre um grande número de pártons, um párton típico será portador de

um momentum individual $k^+ \ll P^+$, isto é, somente uma fração $x = k^+/P^+$, a variável x de Feynman, do momentum total. A compreensão da física da QCD em altas energias, ou, equivalentemente, em x pequeno, requer que entendamos as propriedades das componentes n -gluônicas da função de onda LC do hádron.

A abordagem do CGC consiste em construir uma teoria efetiva de baixa resolução (*coarse-grained*) para a componente com x pequeno dessa função de onda LC do hádron. Por ser mais intuitiva, essa construção será realizada inicialmente para um núcleo grande, mas ficará claro em seguida que, para um x suficientemente pequeno, a teoria pode ser construída para qualquer hádron, usando os procedimentos de cálculo para acoplamento fraco da QCD.

3.2. MODELO McLERRAN-VENUGOPALAN (MV) DE UM NÚCLEO PESADO

Consideremos um núcleo no referencial de momentum infinito (IMF) com momentum $P^+ \rightarrow \infty$. Assumiremos que esse núcleo possui uma extensão transversa aproximadamente infinita, e uma distribuição uniforme de matéria nuclear. Será discutido mais à frente como esse modelo pode ser estendido para incluir distribuições nucleares realistas. No IMF os pártons portadores de frações muito grandes do momentum nuclear (pártons de “valência”) sofrem uma contração de Lorentz para uma distância $\sim 2R/\gamma$, onde $\gamma = P^+/m_p$ e m_p é a massa do próton. Os mini-pártons com frações de momentum $x \ll 1$ encontram-se deslocalizados no sentido x^- sobre distâncias muito maiores. Uma estimativa cinemática simples indica que pártons com frações de momentum $x \ll A^{-1/3}$ encontram-se deslocalizados sobre distâncias maiores do que o diâmetro nuclear $2R$. Esses mini-pártons “veem” os pártons com grande x como fontes infinitamente delgadas de carga de cor. O modelo assume, assim, uma distinção cinemática simples entre mini-pártons e pártons de valência. A realidade é mais complexa, mas veremos que certas características desse modelo simplificado permanecem válidas.

Outra propriedade a ser notada nos mini-pártons é seu curtíssimo tempo de vida. No cone de luz, seu tempo de vida Δx^+ , pelo princípio da incerteza, é uma variável conjugada à sua energia LC: $\Delta x^+ \sim 1/k^-$. Pela relação de dispersão LC, $k^- = m_\perp^2/2k^+ \equiv m_\perp^2/2xP^+$. Logo, $\Delta x^+ \sim xP^+/m_\perp^2$ é **proporcional** a x . Essas estimativas implicam que o tempo de vida dos mini-pártons é muito mais curto do que o dos pártons de valência. Na escala do tempo de vida dos primeiros, esses últimos parecem existir para sempre. Podemos, portanto, considerar os pártons de valência com **fontes estáticas de carga de cor**,

pois, uma vez que o momentum desses pártons é grande, não há recuo pela absorção ou emissão de um quantum de momentum pequeno (*soft quantum*), mantendo-se imóveis.

Esta aproximação é análoga à aproximação eikonal, e nela a nuvem de mini-pártons se acopla somente à componente “positiva” da corrente LC, a qual pode ser escrita como sendo:

$$J^{\mu,a} = \delta^{\mu+} \delta(x^-) \rho^a(x_\perp),$$

onde $\rho^a(x_\perp)$ é a densidade de carga de cor do quark de valência no plano transversal. A função delta em x^- implica uma folha infinitamente fina de carga de cor. Esta hipótese pode, e deve, ser flexibilizada: $\rho^a(x_\perp) \rightarrow \rho^a(x^-, x_\perp)$, como será discutido mais adiante. Deve ser enfatizado que ρ^a é **estática**, isto é, independente do tempo LC x^+ , como já foi mostrado acima.

Vamos então examinar a densidade de carga de cor $\rho^a(x_\perp)$, e como é gerada. Assumimos que o núcleo interage externamente com uma partícula incidente de teste com resolução de distâncias de tamanho Δx_\perp no plano transversal, tamanho esse muito menor que o do núcleo $\sim \Lambda_{QCD}$. Enquanto que, na direção longitudinal, essa pequena partícula com $x \ll A^{-1/3}$ acopla-se simultaneamente a pártons de núcleons distribuídos ao longo do diâmetro nuclear. Como sua extensão transversal é muito menor que o tamanho individual dos núcleons, ela os vê como fontes de carga de força. Se a densidade $n = N_c A / \pi R_A^2$ ($R_A = R_0 A^{1/3}$ é o raio do núcleo) dos quarks de valência no plano transversal é grande, $n \gg \Lambda_{QCD}^2$, e se $n^{-1} \ll \Delta S_\perp \ll 1/\Lambda_{QCD}$, onde $\Delta S_\perp \sim (\Delta x_\perp)^2$, então o número $\Delta N = n \Delta S_\perp$ de cargas de cor situadas no interior do tubo de área transversal ΔS_\perp que atravessa o núcleo é grande: $\Delta N \gg 1$.

Essas fontes tipicamente pertencem a núcleons distintos, de forma que não estão correlacionadas, devido ao confinamento. Assim, são fontes **randômicas** de carga de cor, e a carga total Q^a no interior desse tubo é a soma **incoerente** das cargas de cor dos pártons individuais. Logo:

$$\langle Q^a \rangle = 0, \quad \langle Q^a Q^a \rangle = g^2 C_f \Delta N = \Delta S_\perp \frac{g^2 C_f N_c A}{\pi R_A^2},$$

onde usamos o fato de que o quadrado da carga de cor de um único quark é dado por $g^2 t^a t^a = g^2 C_f$.

Podemos tratar essa carga como sendo clássica, porque, quando ΔN é suficientemente grande, podemos ignorar os comutadores de cargas:

$$| [Q^a, Q^b] | = | i f^{abc} Q^c | \ll Q^2.$$

Vamos introduzir agora a densidade de carga de cor $\rho^a(x^-, x_\perp)$, usando a definição $\rho^a(x_\perp) \equiv \int dx^- \rho^a(x^-, x_\perp)$. Portanto:

$$Q^a = \int_{\Delta S_\perp} d^2 x_\perp \rho^a(x_\perp) = \int_{\Delta S_\perp} d^2 x_\perp \int dx^- \rho^a(x^-, x_\perp),$$

e, lembrando que $C_f = (N_c^2 - 1)/2N_c$, obtemos das equações anteriores de valores esperados:

$$\langle \rho_a(x_\perp) \rho_b(y_\perp) \rangle_A = \delta_{ab} \delta^{(2)}(x_\perp - y_\perp) \mu_A^2, \quad \mu_A^2 \equiv \frac{g^2 A}{2\pi R_A^2},$$

$$\langle \rho_a(x^-, x_\perp) \rho_b(y^-, y_\perp) \rangle_A = \delta_{ab} \delta^{(2)}(x_\perp - y_\perp) \delta(x^- - y^-) \lambda_A(x^-),$$

$$\int dx^- \lambda_A(x^-) = \mu_A^2.$$

Nessas equações, $\mu_A^2 \sim A^{1/3}$ é o valor médio, por unidade de área transversa, por cor, do quadrado da carga de cor dos quarks de valência, e $\lambda_A(x^-)$ é a correspondente densidade por unidade de volume. Esta última possui alguma dependência de x^- , cuja forma precisa, porém, não é importante, desde que as fórmulas finais envolvam apenas a densidade integrada μ_A^2 . Em μ_A^2 e em $\lambda_A(x^-)$ não há dependência explícita de x^+ , uma vez que assumimos a homogeneidade transversa no interior do disco nuclear de raio R_A . Finalmente, as correlações são locais em x^- , uma vez que, conforme exposto anteriormente, fontes de carga de cor em diferentes valores de x^- pertencem a núcleons distintos, logo, não pode haver correlação entre elas. Todas as funções de correlação de mais de dois pontos, conexas, de $\rho_a(\vec{x})$ ($\vec{x} = (x^-, x_\perp)$) são consideradas nulas.

As funções de correlação encontradas nas equações anteriores são geradas pela seguinte função peso:

$$W_A[\rho] = \mathcal{N} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^3x \frac{\rho_a(\vec{x}) \rho_a(\vec{x})}{\lambda_A(x^-)} \right\},$$

que é um funcional gaussiano em ρ_a , com kernel local. Sendo local, é invariante de calibre, logo, $\rho_a(\vec{x})$ nesta expressão pode ser a fonte de cor em qualquer calibre. Contudo, a escolha de um calibre se mostrará necessária quando estudarmos a dinâmica dos glúons irradiados por essa distribuição aleatória de cargas de cor.

Por construção, a forma local e gaussiana da função peso acima é válida para um núcleo suficientemente grande, e obedecendo a um domínio cinemático algo restrito, como será formulado com mais detalhes aqui, para maior clareza. Conforme já foi discutido, esses resultados são corretos para uma resolução transversa de $Q^2 \equiv 1/S_\perp$, dentro da faixa $\Lambda_{QCD}^2 \ll Q^2 \ll \Lambda_{QCD}^2 A^{1/3}$. Por outro lado, a hipótese de que os quarks de valência não são correlacionados deixa de ser válida para separações transversas da ordem de $R_0 \sim 1/\Lambda_{QCD}$ ou superiores, uma vez que quarks de valência com $N_c = 3$ pertencente a um mesmo núcleon estão confinados em um estado singlete de cor. Assim, a carga de cor total, assim como seus momentos de multipolo superiores, deve ser nula quando medida a distâncias da ordem do raio do núcleo R_0 , ou

superiores. Este requisito de neutralidade de cor pode ser incluído na função peso gaussiana, simplesmente substituindo-se a função delta original δ por $\langle \rho^a(x^-, x_\perp) \rho^b(0) \rangle = \lambda(x^-, x_\perp) \delta^{ab}$, onde $\lambda(x^-, x_\perp)$ seja tal que sua transformada de Fourier $\lambda(x^-, k_\perp)$ tenda a zero rapidamente para $k_\perp \leq \Lambda_{QCD}$.

Analisemos agora o domínio de validade da função peso gaussiana acima quanto ao momentum longitudinal. Como já foi ressaltado, os campos de cor que estamos calculando possuem valores pequenos de $x \ll A^{-1/3}$, isto é, carregam um momentum k^+ muito menor do que o das suas fontes, os quarks de valência. Deste modo, as funções peso podem ser vistas como parte de uma **teoria efetiva** (a CGC) para as correlações de glúons com momentum k^+ menor do que algum parâmetro superior de corte Λ^+ que seja da ordem do momentum longitudinal típico dos quarks de valência. Note-se porém que, para as aproximações clássicas que levaram à função peso serem válidas, o valor k^+ de interesse não pode ser **muito** menor do que Λ^+ . De fato, como veremos, novas fontes de cor com momentum $p^+ < \Lambda^+$ são produzidas por radiação a partir das fontes originais que possuem momentum $p^+ \geq \Lambda^+$. Se o intervalo entre p^+ e Λ^+ é relativamente grande – a condição precisa é $\alpha_c N_c \ln(\Lambda^+/k^+) \geq 1$ – estas novas fontes, que são majoritariamente glúons, dominarão completamente a física na escala k^+ que nos interessa. Um procedimento para a construção explícita dessas novas fontes é a extração por integração (*to integrate out*) de sucessivas camadas de flutuações quânticas, usando-se uma análise RG, mas a função peso resultante, em geral, **não** é gaussiana. Mesmo assim, a função peso gaussiana pode ser uma boa condição inicial para a **evolução quântica** da teoria. Outro resultado a ser realçado é que essa função também se mostra uma boa aproximação da teoria quântica, porém, com uma dependência não trivial do momentum transversal na função de dois pontos λ , dependência essa que também pode ser explicitada.

3.3. O VIDRO DE COR

Uma vez conhecida a função peso para as configurações de carga de cor clássica associadas com os pártons de grande x , é possível desenvolver uma **teoria efetiva para glúons com pequeno x** . O funcional gerador para as funções de correlação de dois pontos dos glúons de pequeno x será dado por:

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\rho W_{\Lambda^+}[\rho] \left\{ \frac{\int^{\Lambda^+} \mathcal{D}A \delta(A^+) e^{iS[A, \rho] - \int j \cdot A}}{\int^{\Lambda^+} \mathcal{D}A \delta(A^+) e^{iS[A, \rho]}} \right\},$$

onde a corrente externa j_a^μ é um instrumento formal que permite a geração de funções de Green via derivação funcional, e $S[A, \rho]$ é a ação que descreve a dinâmica dos mini-glúons na presença da densidade de carga de cor clássica ρ , como será mostrado mais adiante. A integral de trajetória sobre os campos de glúons é definida no calibre LC $A_a^+ = 0$, uma vez que este é o calibre que permite a interpretação partônica mais direta. Portanto, ρ_a é a densidade de carga de cor nesse calibre LC.

Note-se a dependência, nas integrais presentes no funcional gerador, do cutoff intermediário Λ^+ do momentum longitudinal. Conforme já explicado, Λ^+ é a escala que separa os pártons ‘rápidos’ ($p^+ > \Lambda^+$), que foram ‘extraídos por integração’ e substituídos pela carga de cor clássica ρ_a pertencente aos mini-glúons ($k^+ < \Lambda^+$), definindo o significado da teoria efetiva, com a explicitação nas integrais do campo de cor clássico de calibre A_a^μ . Uma vez que é obtida depois da extração por integração dos modos com ($p^+ > \Lambda^+$), a função peso $W_{\Lambda^+}[\rho]$ depende da escala de separação Λ^+ . Fica claro que o cutoff intermediário Λ^+ deve ser escolhido de tal forma que $\Lambda^+/P^+ \geq x$, onde x é a fração longitudinal de interesse.

Para um núcleo grande em energias não muito altas (por exemplo, um íon de ${}_{197}^{79}\text{Au}$ no RHIC), temos que $x \sim 10^{-1} - 10^{-2}$, logo, podemos ignorar, em primeira aproximação, a evolução quântica, e identificar ρ com a carga de cor dos quarks de valência. Neste caso, podemos usar o modelo MV descrito anteriormente, assumindo que $W_{\Lambda^+}[\rho] \equiv W_A[\rho]$ é a função peso gaussiana obtida acima.

Para menores valores de x , porém (digamos $x < 10^{-3}$), como nas colisões núcleo-núcleo de ${}_{207}^{82}\text{Pb}$ no LHC, os efeitos quânticos são essenciais, e ρ deve incluir as fontes de cor geradas pela evolução quântica dos pártons rápidos ($p^+ > \Lambda^+$) até Λ^+ . Essas fontes são essencialmente glúons, essas cargas serão interpretadas no CGC como um efeito não linear das cargas clássicas, e suas correlações serão introduzidas na renormalização da função peso $W_{\Lambda^+}[\rho]$. Assim, podemos restringir a evolução quântica ao setor gluônico, e os únicos férmions a serem incluídos como fontes de carga de cor serão os quarks de valência presentes nas condições iniciais.

Se a escala de interesse $k^+ = xP^+$ é da ordem de Λ^+ , ou ligeiramente abaixo, as funções de correlação nesta escala serão calculadas na **aproximação clássica**, isto é, efetuando a integral de trajetória da função peso sobre A^μ na aproximação de **ponto de sela**. Existem duas razões para isso: a) as correções quânticas devidas aos glúons na faixa intermediária $k^+ < p^+ < \Lambda^+$ são, no máximo, de ordem $\alpha_s \ln(\Lambda^+/k^+)$, e, portanto, são verdadeiramente efeitos de ordem superior, dado que $\ln(\Lambda^+/k^+) \leq 1$; b) os glúons com x pequeno apresentam grandes números de ocupação $N_g \gg 1$, até que no limite de saturação os N_g são parametrizados na ordem de $1/\alpha_s$, de modo que suas autointerações podem ser tratadas pela aproximação clássica, ou seja, pela resolução das equações clássicas de campo $\delta S/\delta A^\mu = 0$, ou, mais explicitamente, das equações de movimento (EOM):

$$(D_\nu F^{\nu\mu})_a(x) = \delta^{\mu+} \rho_a(\vec{x}),$$

onde $D_\nu = \partial_\nu - igA_\nu^a T^a$, com $(T^a)_{bc} = -if_{abc}$.

Note-se, porém, que, precisamente por serem muito grandes os números de ocupação, os campos clássicos correspondentes são intensos ($A^i \sim 1/g$, na saturação), e por isso as não linearidades clássicas devem ser tratadas **exatamente**. Em particular, é necessário obter a solução exata das EOM acima, o que será feito na próxima seção. Uma vez que essa solução seja conhecida, como um funcional explícito de ρ , as funções de correlação de interesse são obtidas calculando-se a média sobre ρ , usando a função peso $W_{\Lambda^+}[\rho]$. Por exemplo, a função de dois pontos será calculada por:

$$\langle A_a^\mu(x^+, \vec{x}) A_b^\nu(x^+, \vec{y}) \rangle_{\Lambda^+} = \int \mathcal{D}\rho W_{\Lambda^+}[\rho] A_a^\mu(\vec{x}) A_b^\nu(\vec{y}),$$

onde $A_a^\mu \equiv A_a^\mu[\rho]$ é a solução das EOM, e é independente do tempo LC x^+ , porque assim é a fonte $\rho_a(\vec{x})$. Isto significa que apenas as funções de correlação em **tempos iguais** poderão ser calculadas dessa maneira. Mas são precisamente estas funções que interessam para o espalhamento com x pequeno.

A questão que resta é: qual é a função peso $W_{\Lambda^+}[\rho]$ para $\Lambda^+ \ll P^+$? Esta pergunta pode ser respondida através de um cálculo quântico, cujo resultado nos permitirá calcular W_{Λ^+} em termos da condição inicial $W_{\Lambda_0^+}$, extraindo por integração os glúons com momentum p^+ no intervalo $\Lambda_0^+ < p^+ < \Lambda^+$. Acontece que, para isso, é preciso especificar também a ação $S[A, \rho]$ na função peso gaussiana. O ansatz mais simples, $S[A, \rho] = S_{YM}[A] + \int_x \rho_a A_a^-$, que geraria a EOM clássica acima, não pode estar correto, uma vez que o segundo termo, que envolve ρ , não é invariante de calibre. Isto apenas reflete o fato de que, escrita daquela forma, a EOM clássica também não é invariante de calibre. Na verdade, aquela forma da EOM é válida apenas para as configurações de campo quando $A_a^- = 0$. Isto não chega a ser uma limitação para os cálculos **clássicos**, uma vez que é sempre possível se construir uma solução clássica com essa propriedade. Mas a EOM naquela forma não é suficientes para determinar $S[A, \rho]$, que é explicitamente necessária para os cálculos **quânticos**.

Para encontrarmos a equação geral, que substituirá essa EOM particular para um calibre arbitrário em que $A_a^- \neq 0$, devemos observar que, em geral, a corrente J_a^μ no lado direito das equações de Yang-Mills deve satisfazer a lei de conservação na forma covariante $D_\mu J^\mu = 0$, lembrando que temos também a relação $D_\mu D_\nu F^{\mu\nu} = 0$. Para a corrente eikonal

$$J^{\mu,a} = \delta^{\mu+} \delta(x^-) \rho^a(x_\perp),$$

isto implica $D^- J^+ \equiv (\partial/\partial x^+ - igA^-) J^+ = 0$, que, de fato se reduz a $\partial^- \rho = 0$ quando $A^- = 0$. Mas, de forma geral, essa condição é satisfeita por $J^+(x^+, \vec{x}) = W(x^+, \vec{x}) \rho(\vec{x}) W^\dagger(x^+, \vec{x})$. Introduzimos aqui a linha de Wilson temporal:

$$W[A^-](x^+, \vec{x}) \equiv T \exp \left\{ ig \int_{-\infty}^{x^+} dz^+ A^-(z^+, \vec{x}) \right\},$$

com T indicando a ordenação temporal das matrizes de cor na exponencial, com respeito aos seus argumentos x^+ . A ação que gera a EOM com a corrente acima se escreve:

$$S[A, \rho] = - \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{i}{gN_c} \int d^3\vec{x} \text{Tr} \{ \rho(\vec{x}) W[A^-](\vec{x}) \},$$

onde $W[A^-](\vec{x})$ corresponde, na linha de Wilson acima, ao limite $x^+ \rightarrow \infty$. E, finalmente, esta ação é de fato invariante de calibre.

A estrutura matemática das médias sobre ρ realizadas no funcional gerador das funções de correlação e na função de dois pontos é a de um **Vidro de Cor** (*Color Glass*). Por exemplo, a função de dois pontos que resulta do funcional gerador com a aplicação da corrente definida pela linha temporal de Wilson tem a seguinte estrutura matemática bem particular:

$$\langle T A^\mu(x) A^\nu(y) \rangle_{\Lambda^+} = \int \mathcal{D}\rho W_{\Lambda^+}[\rho] \left\{ \frac{\int^{\Lambda^+} \mathcal{D}A A^\mu(x) A^\nu(y) e^{iS[A, \rho]}}{\int^{\Lambda^+} \mathcal{D}A e^{iS[A, \rho]}} \right\}.$$

É importante ressaltar que essa expressão **não** é a mesma que:

$$\frac{\int \mathcal{D}\rho W_\Lambda[\rho] \int^\Lambda \mathcal{D}A A^\mu(x) A^\nu(y) e^{iS[A, \rho]}}{\int \mathcal{D}\rho W_\Lambda[\rho] \int^\Lambda \mathcal{D}A e^{iS[A, \rho]}}$$

A razão física para isso é que a separação temporal fundamental entre os mini-glúons que se deslocam rapidamente e os comparativamente "congelados" pártons com grande x . Desta forma resolve-se inicialmente a dinâmica dos mini-glúons na presença de uma distribuição **fixa** de cargas de cor, e só então se calculam as médias sobre essa distribuição. Neste modelo não há retroalimentação a partir da **evolução** das fontes sobre os campos de mini-glúons. E não existe interferência entre sucessivas configurações das fontes de cor. Essas características, juntamente com as grandes flutuações na densidade de carga de cor, são as mais fortes razões pelas quais o modelo MV trata os pártons com grande x como constituindo uma **distribuição randômica clássica**.

O protótipo teórico de um vidro de cor é o **vidro de spin** (*spin glass*), definido como uma coleção de impurezas magnéticas distribuídas em uma rede não magnética. Os graus dinâmicos de liberdade, que variam rapidamente, são os momentos magnéticos – os spins – das impurezas, enquanto que a "desordem" lentamente variável se refere às posições desses spins na rede hospedeira. Para estudar a termodinâmica de um sistema desse tipo, começa-se calculando a energia livre – o logaritmo da função de partição – do sistema de spins para uma desordem **fixa**, ou seja, para uma dada configuração espacial das impurezas., para em seguida se calcularem as médias sobre todas essas configurações, usando alguma função peso. A média final sobre as configurações não é uma média térmica: o que se obtém é a média da energia livre calculada separadamente para cada configuração.

De forma análoga, as funções de correlação **conexas** dos glúons com pequeno x nesta teoria efetiva do CGC são obtidas pelo seguinte funcional gerador:

$$F[j_a^\mu] = \int \mathcal{D}\rho W_\Lambda[\rho] \ln \left(\int^{\Lambda} \mathcal{D}A \delta(A^+) e^{iS[A, \rho] - i \int j \cdot A} \right),$$

onde o logaritmo é tomado sobre o **interior** da integral sobre ρ . Isto equivale a dizer que a energia livre atinge seu extremo como uma função da fonte externa j para uma distribuição fixa das fontes de carga de cor. A energia livre – a função de correlação – **medida** é obtida finalmente após a média ser calculada também sobre ρ .

Observe-se que a presença de um efeito de fundo não trivial de carga de cor quebra a simetria de calibre explicitamente. Porém essa simetria é restaurada no processo de cálculo da média sobre ρ , desde que a função peso seja **invariante de calibre**, o que será assumido daqui em diante.

3.4. O CAMPO CLÁSSICO DE COR

Vamos agora construir a solução da EOM clássica:

$$(D_\nu F^{\nu\mu})_a(x) = \delta^{\mu+} \rho_a(\vec{x})$$

Observemos primeiro que , para uma grande classe de calibres, pode-se sempre encontrar uma solução com as seguintes propriedades:

$$F_a^{ij} = 0, \quad A_a^- = 0,$$

campos A_a^+ e $A_a^i \rightarrow$ estáticos,

onde “estático” significa **independente de** x^+ . Esta característica se segue da estrutura específica da fonte de cor, que possui somente uma componente “+”, e é estática.

Como $F^{ij} = 0$, os campos transversos A^i formam um calibre $(1+1)$ -dimensional puro, isto é, existe uma rotação de calibre $U(x^+, x_\perp) \in SU(N)$ tal que:

$$A^i(x^-, x_\perp) = \frac{i}{g} U(x^-, x_\perp) \partial^i U^\dagger(x^-, x_\perp).$$

A notação matricial usada é a da representação adjunta: $A^i = A_a^i T^a$, etc. Assim, os requisitos acima permitem apenas dois graus de liberdade independentes, $A^+(x^-)$ e $U(x^-)$, que serão reduzidos a apenas um ($A^+(x^-)$ ou $U(x^-)$) após a escolha de um corte no fibrado da família de conexões, ou seja, após impor uma condição de fixação de calibre.

Consideremos primeiro o calibre covariante (COV) $\partial_\mu A^\mu = 0$. As condições anteriores implicam $\partial_i A^i = 0$ ou $U = 0$. Assim, neste calibre, $\tilde{A}_a^\mu(x) = \delta^{\mu+} \alpha_a(x^-, x_\perp)$, com $\alpha_a(x^-)$ relacionada linearmente com a fonte de cor $\tilde{\rho}_a$ no calibre COV:

$$-\nabla_\perp^2 \alpha_a(x^-) = \tilde{\rho}_a(x^-).$$

O único tensor de intensidade de campo não trivial é o campo “elétrico” $\tilde{F}_a^{+i} = -\partial^i \alpha_a$. A equação cima tem como solução:

$$\begin{aligned} \alpha_a(x^-, x_\perp) &= \int d^2 y_\perp \langle x_\perp | \frac{1}{-\nabla_\perp^2} | y_\perp \rangle \tilde{\rho}_a(x^-, y_\perp) \\ &= \int \frac{d^2 y_\perp}{4\pi} \ln \frac{1}{(x_\perp - y_\perp)^2 \mu^2} \tilde{\rho}_a(x^-, y_\perp), \end{aligned}$$

onde o cutoff infravermelho μ é necessário para que o operador laplaciano seja inversível em duas dimensões, mas eventualmente desaparecerá, ou será substituído pela escala de confinamento Λ_{QCD} , quando as fórmulas subsequentes forem desenvolvidas.

Mais tarde será necessário obter a solução clássica no calibre LC $A^+ = 0$, que é da forma $A_a^\mu = \delta^{\mu i} \mathcal{A}_a^i$, onde $\mathcal{A}_a^i(x^-, x_\perp)$ é um “calibre puro”, como o campo transversal $A_a^i(x^-, x_\perp)$.

A rotação de calibre $U(\vec{x})$ pode ser obtida mais facilmente por uma rotação de calibre da solução do calibre COV:

$$\mathcal{A}^\mu = U(\bar{\mathcal{A}}^\mu + \frac{i}{g}\partial^\mu)U^\dagger,$$

onde essa rotação é escolhida de forma que $\mathcal{A}^+ = 0$, ou seja:

$$U^\dagger(x^-, x_\perp) = \text{P exp} \left\{ ig \int_{-\infty}^{x^-} dz^- \alpha_a(z^-, x_\perp) T^a \right\}.$$

O limite inferior $x_0^- \rightarrow -\infty$ na integral sobre x^- foi escolhido da tal forma a impor as condições de contorno “retardadas”:

$$\mathcal{A}_a^i(x) \rightarrow 0 \text{ quando } x_0^- \rightarrow -\infty.$$

Estas condições serão úteis nas etapas seguintes. Deve ser observado que a propriedade de “retardamento” diz respeito a x^- , e não ao tempo x^+ .

A solução \mathcal{A}^i no calibre LC tem então sua expressão explícita, em termos da fonte de cor $\tilde{\rho}$ no calibre COV, dada pelo conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^i(x^-, x_\perp) &= \frac{i}{g} U(x^-, x_\perp) \partial^i U^\dagger(x^-, x_\perp) \\ \alpha_a(x^-, x_\perp) &= \int d^2 y_\perp \langle x_\perp | \frac{1}{-\nabla_\perp^2} | y_\perp \rangle \tilde{\rho}_a(x^-, y_\perp) \\ &= \int \frac{d^2 y_\perp}{4\pi} \ln \frac{1}{(x_\perp - y_\perp)^2 \mu^2} \tilde{\rho}_a(x^-, y_\perp), \\ U^\dagger(x^-, x_\perp) &= \text{P exp} \left\{ ig \int_{-\infty}^{x^-} dz^- \alpha_a(z^-, x_\perp) T^a \right\}. \end{aligned}$$

É o suficiente para atingir o propósito de calcular observáveis, desde que a média na expressão:

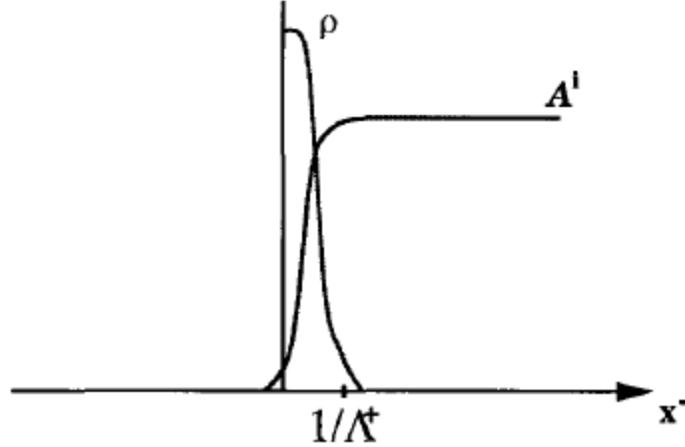
$$\langle A_a^\mu(x^+, \vec{x}) A_b^\nu(x^+, \vec{y}) \rangle_{\Lambda^+} = \int \mathcal{D}\rho W_{\Lambda^+}[\rho] \mathcal{A}_a^\mu(\vec{x}) \mathcal{A}_b^\nu(\vec{y})$$

possa ser reescrita como um funcional integral sobre a fonte de carga de cor $\tilde{\rho}$ no calibre COV por uma mudança de variáveis:

$$\langle A^i(x^+, \vec{x}) A^j(x^+, \vec{y}) \cdots \rangle_{\Lambda^+} = \int \mathcal{D}\tilde{\rho} W_{\Lambda^+}[\tilde{\rho}] \mathcal{A}_x^i[\tilde{\rho}] \mathcal{A}_y^j[\tilde{\rho}] \cdots .$$

Até este ponto, a estrutura longitudinal da fonte se manteve arbitrária. As soluções escritas acima são válidas para qualquer função $\rho^a(x^-)$. Para dar seguimento, entretanto, vale a pena lembrar, como já foi dito anteriormente, que ρ está localizada próxima a $x^- = 0$. Ou, dito com mais rigor matemático, a análise quântica posterior demonstrará que a fonte clássica na escala longitudinal Λ^+ possui suporte em x^- no intervalo fechado $0 \leq x^- \leq 1/\Lambda^+$. Extrai-se da solução apresentada acima que este também é o suporte longitudinal do campo “coulombiano” α . Desta forma, as integrais sobre x^- recebem sua contribuição total de x^- neste intervalo limitado. Toda partícula de teste com momentum $q^+ \ll \Lambda^+$ - portanto, com uma resolução longitudinal muito inferior – não estará apta a discriminar a estrutura interna da fonte.

Ao contrário, essa partícula de prova perceberá uma estrutura de fonte/campo que é singular em $x^- = 0$: $\rho_a(x^-, x_\perp) \approx \delta(x^-) \rho_a(x_\perp)$, conforme ilustra a figura (na escala k^+ da teoria efetiva CGC):



Como funções de x^- , tanto α quanto \mathcal{F}^{+i} estarão tão localizados quanto ρ .
Em particular:

$$\mathcal{A}^i(x^-, x_\perp) \approx \theta(x^-) \frac{i}{g} V(\partial^i V^\dagger)(x_\perp),$$

em que V e V^\dagger são obtidos fazendo-se o limite $x^- \rightarrow \infty$ na equação anterior para U^\dagger :

$$U^\dagger(x^-, x_\perp) = \text{P exp} \left\{ ig \int_{-\infty}^{x^-} dz^- \alpha_a(z^-, x_\perp) T^a \right\}$$

$$(x^- \rightarrow \infty) =$$

$$V^\dagger(x_\perp) \equiv \text{P exp} \left\{ ig \int_{-\infty}^{\infty} dz^- \alpha(z^-, x_\perp) \right\}.$$

3.5. A DISTRIBUIÇÃO GLUÔNICA

Chamaremos de $G(x, Q^2) dx$ o número de glúons na função de onda do hádron que possuem momentum longitudinal entre xP^+ e $(x + dx)P^+$ e dimensão transversa $\Delta x_\perp \sim 1/Q$. Em outras palavras, a **distribuição gluônica** $xG(x, Q^2)$ é o número de glúons com momentum transverso $k_\perp \leq Q$ por unidade de rapidez:

$$\begin{aligned} xG(x, Q^2) &= \int^{Q^2} d^2 k_\perp k^+ \frac{dN}{dk^+ d^2 k_\perp} \Big|_{k^+ = xP^+} \\ &= \int d^3 k \Theta(Q^2 - k_\perp^2) x \delta(x - k^+/P^+) \frac{dN}{d^3 k}, \end{aligned}$$

onde $\Theta(x)$ é a função degrau de Heaviside, $\vec{k} \equiv (k^+, k_\perp)$, e

$$\frac{dN}{d^3 k} = \langle a_c^{i\dagger}(x^+, \vec{k}) a_c^i(x^+, \vec{k}) \rangle = \frac{2k^+}{(2\pi)^3} \langle A_c^i(x^+, \vec{k}) A_c^i(x^+, -\vec{k}) \rangle$$

é a densidade gluônica no espaço de Fock, isto é, o número de glúons por unidade de volume no espaço dos momentos.

A dificuldade reside, porém, em que esse número depende do calibre, não sendo, portanto, e em geral, um observável físico. Mesmo assim, como veremos, essa grandeza pode agregar um significado invariante de calibre quando calculada no calibre LC $A_a^+ = 0$. Usando o fato de que, nesse calibre, $F_a^{i+}(k) = ik^+ A_a^i(k)$, e resumindo a notação por $k^+ = xP^+$, obtém-se:

$$xG(x, Q^2) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \Theta(Q^2 - k_\perp^2) \langle F_a^{i+}(\vec{k}) F_a^{i+}(-\vec{k}) \rangle,$$

que ainda não parece ser invariante de calibre. Por outro lado, um operador equivalente manifestamente invariante de calibre pode ser construído pela inserção de linhas de Wilson, como já fizemos antes. No calibre LC, essa expressão invariante de calibre se reduz à última expressão acima, desde que a liberdade de calibre residual das componentes transversas do campo de calibre seja fixada pela imposição da condição de contorno “retardada” já definida,

$$A_a^i(x) \rightarrow 0 \quad x^- \rightarrow -\infty$$

Esta particular fixação de calibre já no problema do campo clássico terá importantes consequências para os cálculos quânticos, uma vez que fixa a prescrição $i\epsilon$ que será usada para o “polo axial” no propagador de glúons no calibre LC.

Mais à frente também será necessária a densidade gluônica no espaço de fase transversal (também chamada de “distribuição gluônica não integrada”, ou “número de ocupação de glúon”). Define-se esta como:

$$\varphi_\tau(k_\perp) \equiv \frac{4\pi^3}{N_c^2 - 1} \frac{1}{\pi R^2} \frac{d^3 N}{d\tau d^2 k_\perp} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{\langle F_a^{i+}(\vec{k}) F_a^{i+}(-\vec{k}) \rangle}{N_c^2 - 1},$$

onde $\tau = \ln(1/x) = \ln(P^+/k^+)$. A menos do fator $4\pi^3$, este é o número de glúons de cada cor por unidade de rapidez por unidade de volume do espaço de fase transversal. Por simplicidade, assume-se que a distribuição no plano transversal é homogênea.

Para ilustrar o procedimento descrito, vamos calcular a distribuição gluônica de um núcleo pesado no modelo MV. Iniciamos no regime de baixa densidade, que é válido quando o número atômico A não é muito alto, e, portanto, o campo clássico correspondente é fraco e pode ser calculado na aproximação linear, ou eikonal. Expandindo na ordem linear em ρ a solução geral

$$A^i(x^-, x_\perp) = \frac{i}{g} U(x^-, x_\perp) \partial^i U^\dagger(x^-, x_\perp)$$

ou, de forma equivalente, resolvendo diretamente a versão linearizada da equação

$$(D_\nu F^{\nu\mu})_a(x) = \delta^{\mu+} \rho_a(\vec{x}),$$

obtem-se, sem muita dificuldade:

$$\mathcal{A}_a^i(k) \simeq -\frac{k^i}{k^+ + i\epsilon} \frac{\rho_a(k^+, k_\perp)}{k_\perp^2}, \quad \mathcal{F}_a^{+i}(k) \simeq i \frac{k^i}{k_\perp^2} \rho_a(\vec{k}),$$

de onde, aplicando as equações

$$\begin{aligned}\langle \rho_a(x_\perp) \rho_b(y_\perp) \rangle_A &= \delta_{ab} \delta^{(2)}(x_\perp - y_\perp) \mu_A^2, & \mu_A^2 &\equiv \frac{g^2 A}{2\pi R_A^2}, \\ \langle \rho_a(x^-, x_\perp) \rho_b(y^-, y_\perp) \rangle_A &= \delta_{ab} \delta^{(2)}(x_\perp - y_\perp) \delta(x^- - y^-) \lambda_A(x^-), \\ \int dx^- \lambda_A(x^-) &= \mu_A^2\end{aligned}$$

tiramos que

$$\langle \mathcal{F}_a^{i+}(\vec{k}) \mathcal{F}_a^{i+}(-\vec{k}) \rangle_A \simeq \frac{1}{k_\perp^2} \langle \rho_a(\vec{k}) \rho_a(-\vec{k}) \rangle_A = \pi R_A^2 (N_c^2 - 1) \frac{\mu_A^2}{k_\perp^2}.$$

Inserindo este resultado nas equações

$$\begin{aligned}\varphi_\tau(k_\perp) &\equiv \frac{4\pi^3}{N_c^2 - 1} \frac{1}{\pi R^2} \frac{d^3 N}{d\tau d^2 k_\perp} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{\langle F_a^{i+}(\vec{k}) F_a^{i+}(-\vec{k}) \rangle}{N_c^2 - 1}, \\ xG(x, Q^2) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \Theta(Q^2 - k_\perp^2) \langle F_a^{i+}(\vec{k}) F_a^{i+}(-\vec{k}) \rangle,\end{aligned}$$

obtemos as seguintes estimativas para a densidade gluônica e para a função distribuição:

$$\begin{aligned}\varphi_A(k_\perp) &\simeq \frac{\mu_A^2}{k_\perp^2}, \\ xG_A(x, Q^2) &\simeq \frac{(N_c^2 - 1) R_A^2}{4\pi} \mu_A^2 \int_{\Lambda_{QCD}^2}^{Q^2} \frac{dk_\perp^2}{k_\perp^2} = \frac{\alpha_s A N_c C_f}{\pi} \ln \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2},\end{aligned}$$

com $\alpha_s = \mathcal{G}^2/4\pi$. A integral sobre k_\perp na segunda linha exibe uma divergência logarítmica no infravermelho que foi cortada na escala Λ_{QCD} , uma vez que sabemos que, devido ao confinamento, existe neutralidade de cor na dimensão do núcleon

$R_0 \sim 1/\Lambda_{QCD}$. Veremos, quando for levada em conta a evolução quântica, que a escala real para a blindagem da física no infravermelho não é Λ_{QCD} , mas sim a escala de saturação Q_s .

As equações para a densidade e a distribuição acima são de fato os resultados esperados, que podem ser obtidos por outras abordagens, como, por exemplo, uma análise direta da radiação de glúons por um único quark, acrescida de hipótese de que glúons emitidos por quarks distintos não interagem entre si, de forma que a distribuição total de glúons é simplesmente a soma das contribuições independentes dos $A \times N_c$ quarks de valência. Este procedimento equivalente existe, e é conhecido como a aproximação de Weizsäcker-Williams para a irradiação de glúons a partir de quarks independentes.

3.6. SATURAÇÃO DE GLÚONS EM UM NÚCLEO PESADO

De acordo com as duas últimas equações, a densidade gluônica no espaço de fase transverso é proporcional a $A^{1/3}$, e se torna arbitrariamente grande à medida que A aumenta. Na verdade, isso é um falso verdadeiro oriundo da aproximação usada, que despreza as interações entre os glúons emitidos, ou irradiados pelos quarks. Essas interações correspondem a efeitos não lineares nas equações dos campos clássicos. Para confirmar essa análise, é necessário recalcular a distribuição gluônica usando a solução não linear exata para o campo clássico, como já foi mostrado acima. Usando a igualdade $\mathcal{F}_a^{+i}(\vec{x}) = U_{ab}^\dagger(-\partial^i \alpha^b)$, pode-se expressar a função de correlação campo-campo relevante no calibre LC em termos do campo de cor no calibre COV:

$$\langle \mathcal{F}_a^{+i}(\vec{x}) \mathcal{F}_a^{+i}(\vec{y}) \rangle_A = \langle (U_{ab}^\dagger \partial^i \alpha^b)_{\vec{x}} (U_{ac}^\dagger \partial^i \alpha^c)_{\vec{y}} \rangle_A.$$

Pode-se mostrar que o lado direito desta equação pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \langle (U_{ab}^\dagger \partial^i \alpha^b)_{\vec{x}} (U_{ac}^\dagger \partial^i \alpha^c)_{\vec{y}} \rangle &= \langle \partial^i \alpha^b(\vec{x}) \partial^i \alpha^c(\vec{y}) \rangle \langle U_{ab}^\dagger(\vec{x}) U_{ca}(\vec{y}) \rangle \\ &= \delta(x^- - y^-) \langle \text{Tr} U^\dagger(\vec{x}) U(\vec{y}) \rangle (-\nabla_\perp^2 \gamma_A(x^-, x_\perp - y_\perp)), \end{aligned}$$

onde usamos a identidade $U_{ac}^\dagger = U_{ca}$ na representação adjunta.

Foi usada aqui a seguinte função de correlação:

$$\begin{aligned}\langle \alpha_a(\vec{x}) \alpha_b(\vec{y}) \rangle_A &= \delta_{ab} \delta(x^- - y^-) \gamma_A(x^-, x_\perp - y_\perp), \\ \gamma_A(x^-, k_\perp) &\equiv \frac{1}{k_\perp^4} \lambda_A(x^-),\end{aligned}$$

que se segue diretamente da igualdade $\tilde{\rho}^a(x^-, k_\perp) = k_\perp^2 \alpha^a(x^-, k_\perp)$ e das equações já vistas

$$\begin{aligned}\langle \rho_a(x_\perp) \rho_b(y_\perp) \rangle_A &= \delta_{ab} \delta^{(2)}(x_\perp - y_\perp) \mu_A^2, \quad \mu_A^2 \equiv \frac{g^2 A}{2\pi R_A^2}, \\ \langle \rho_a(x^-, x_\perp) \rho_b(y^-, y_\perp) \rangle_A &= \delta_{ab} \delta^{(2)}(x_\perp - y_\perp) \delta(x^- - y^-) \lambda_A(x^-), \\ \int dx^- \lambda_A(x^-) &= \mu_A^2.\end{aligned}$$

O traço $\text{Tr} U^\dagger(\vec{x}) U(\vec{y})$ na função de correlação acima pode ser calculado explicitamente usando-se a identidade:

$$S_A(x^-, x_\perp - y_\perp) \equiv \frac{1}{N_c^2 - 1} \langle \text{Tr} U^\dagger(x^-, x_\perp) U(x^-, y_\perp) \rangle_A,$$

resultando em:

$$S_A(x^-, r_\perp) = \exp\left\{-g^2 N_c \int_{-\infty}^{x^-} dz^- [\gamma_A(z^-, 0_\perp) - \gamma_A(z^-, r_\perp)]\right\},$$

onde

$$\gamma_A(x^-, 0_\perp) - \gamma_A(x^-, r_\perp) = \lambda_A(x^-) \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_\perp^4} [1 - e^{ik_\perp \cdot r_\perp}].$$

A integral acima sobre k_\perp é dominada por momentos lentos, e possui uma divergência logarítmica no infravermelho que, neste contexto clássico, somente pode ser blindada pelo confinamento na escala Λ_{QCD} .

Com acurácia até as ordens determinantes no logaritmo, isto é, retendo-se apenas os termos que contiverem a dependência do elevado logaritmo $\ln(1/r_{\perp}^2 \Lambda_{QCD}^2)$, o valor exato do cutoff infravermelho não é relevante, e podemos também expandir a integral como:

$$\int \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2} \frac{1 - e^{ik_{\perp} \cdot r_{\perp}}}{k_{\perp}^4} \simeq \int \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_{\perp}^4} \frac{(k_{\perp} \cdot r_{\perp})^2}{2} \simeq \frac{r_{\perp}^2}{16\pi} \ln \frac{1}{r_{\perp}^2 \Lambda_{QCD}^2}.$$

Isto nos dá, fazendo a identificação $\mu_A^2(x^-) \equiv \int_{-\infty}^{x^-} dx^- \lambda_A(x^-)$,

$$S_A(x^-, r_{\perp}) \simeq \exp \left\{ -\frac{\alpha_s N_c}{4} r_{\perp}^2 \mu_A^2(x^-) \ln \frac{1}{r_{\perp}^2 \Lambda_{QCD}^2} \right\},$$

que, juntamente com a equação da função de correlação acima no calibre COV, pode ser usada para calcularmos finalmente a densidade gluônica acima definida pela equação

$$\varphi_{\tau}(k_{\perp}) \equiv \frac{4\pi^3}{N_c^2 - 1} \frac{1}{\pi R^2} \frac{d^3 N}{d\tau d^2 k_{\perp}} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{\langle F_a^{i+}(\vec{k}) F_a^{i+}(-\vec{k}) \rangle}{N_c^2 - 1}$$

Após algum algebrismo, obtemos:

$$\varphi_A(k_{\perp}) = \int d^2 r_{\perp} e^{-ik_{\perp} \cdot r_{\perp}} \frac{1 - \exp\left\{ -\frac{1}{4} r_{\perp}^2 Q_A^2 \ln \frac{1}{r_{\perp}^2 \Lambda_{QCD}^2} \right\}}{\pi \alpha_s N_c r_{\perp}^2},$$

onde

$$Q_A^2 \equiv \alpha_s N_c \mu_A^2 = \alpha_s N_c \int dx^- \lambda_A(x^-) \sim A^{1/3}.$$

Para estudarmos a dependência em k_{\perp} dessa integral, deve ser calculada a sua transformada de Fourier, mas o resultado pode ser facilmente antecipado.

Vamos introduzir primeiro o **momentum de saturação** $Q_s(A)$, o qual, como veremos, é a escala que separa comportamento lineares de não lineares. O que o define é a condição de que, para $r_{\perp} = 2/Q_s(A)$, o expoente constante na integral se torna da ordem de 1, o que nos dá:

$$Q_s^2(A) \simeq \alpha_s N_c \mu_A^2 \ln \frac{Q_s^2(A)}{\Lambda_{QCD}^2} \sim A^{1/3} \ln A.$$

Observe-se que essa grandeza é maior do que o $Q(A)$ da expressão anterior, uma vez que estamos trabalhando com a hipótese de que $Q_A \gg \Lambda_{QCD}$. Podemos então distinguir dois regimes:

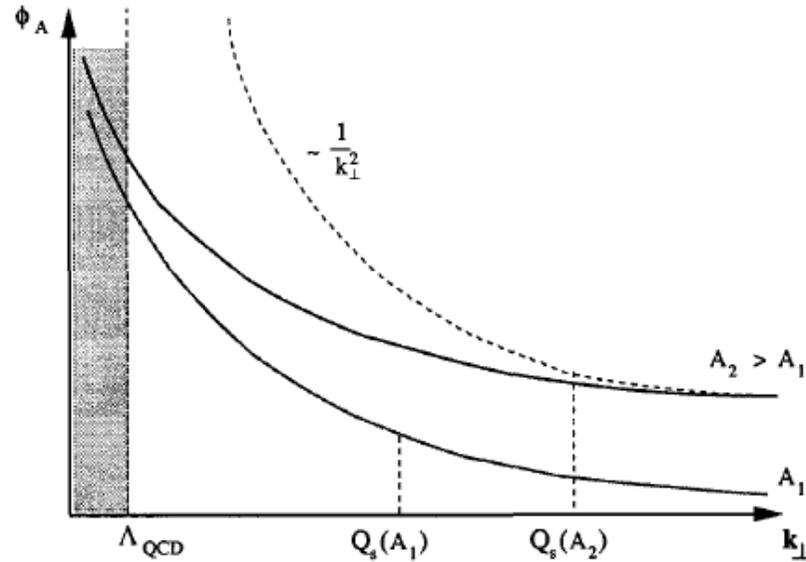
- i) Para momentum alto $k_{\perp} \gg Q_s(A)$, a integral é dominada por um pequeno $r_{\perp} \ll 1/Q_s(A)$, e pode ser explicitado com a expansão da exponencial. Na ordem não trivial mais baixa, que corresponde à aproximação linear, é recuperado o espectro de *bremsstrahlung* da densidade gluônica:

$$\varphi_A(k_{\perp}) \approx \frac{1}{\alpha_s N_c} \frac{Q_A^2}{k_{\perp}^2} = \frac{\mu_A^2}{k_{\perp}^2} \quad k_{\perp} \gg Q_A.$$

- ii) Para momentum pequeno, $k_{\perp} \ll 1/Q_s(A)$, a contribuição dominante corresponde a grandes distâncias $r_{\perp} \gg 1/Q_s(A)$, frente as quais se pode simplesmente ignorar a exponencial no numerador e reconhecer $1/r_{\perp}^2$ como a transformada de Fourier de $\ln k_{\perp}^2$:

$$\varphi_A(k_{\perp}) \approx \frac{1}{\alpha_s N_c} \ln \frac{Q_s^2(A)}{k_{\perp}^2} \quad \text{for } k_{\perp} \ll Q_A.$$

Diferentemente da distribuição linear, que cresce com $A^{1/3}$ e é dominada fortemente pelo infravermelho, pois varia como $1/k_{\perp}^2$, a expressão da distribuição acima, que leva em conta os efeitos não lineares das equações clássicas de Yang-Mills, cresce apenas logarithmicamente, como função tanto de A quanto de $1/k_{\perp}^2$. Este é o resultado da **saturação**. Na saturação, o fator de ocupação de glúons, parametricamente, é da ordem de $1/\alpha_s$, o que corresponde a um BEC (*Bose-Einstein condensate*), e é a densidade permitida pelas interações de repulsão entre os campos fortes de cor $\bar{A}^i = \sqrt{(A^i A^i)} \sim 1/g$. Quando o número atômico A cresce, os novos glúons são produzidos preponderantemente com grandes momentos transversos $\geq Q_s(A)$, para os quais essa repulsão é menos importante. A figura abaixo ilustra essa variação.



A densidade gluônica $\phi_A(k_{\perp})$ no espaço de fase, segundo o modelo MV para um núcleo pesado, está plotada como função de k_{\perp} para dois valores de A . Para valores elevados do momentum, $k_{\perp} > Q_s$, a curva varia como $1/k_{\perp}^2$, e para valores pequenos $k_{\perp} < Q_s$ a variação é logarithmica.

Para deixar mais clara a interpretação física da escala de saturação, note-se que, a curtas distâncias $r_{\perp} \ll 1/Q_s(A)$,

$$\mu_A^2 \ln \frac{1}{r_{\perp}^2 \Lambda_{QCD}^2} \propto \frac{xG(x, 1/r_{\perp}^2)}{(N_c^2 - 1)\pi R_A^2}$$

é o número de glúons de cada cor que possuem dimensão transversa r_{\perp} por unidade de área transversa, como podemos verificar nas equações já obtidas:

$$\varphi_A(k_{\perp}) \simeq \frac{\mu_A^2}{k_{\perp}^2},$$

$$xG_A(x, Q^2) \simeq \frac{(N_c^2 - 1)R_A^2}{4\pi} \mu_A^2 \int_{\Lambda_{QCD}^2}^{Q^2} \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} = \frac{\alpha_s AN_c C_f}{\pi} \ln \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2},$$

onde $\alpha_s = g^2/4\pi$. Uma vez que cada um desses glúons é portador de uma carga de cor quadrática $(gT^a)(gT^a) = g^2 N_c$, podemos deduzir que $\alpha_s N_c \mu_A^2 \ln(1/r_{\perp}^2 \Lambda_{QCD}^2)$ é a carga de cor quadrática média dos glúons que têm dimensão transversa r_{\perp} por unidade de área por cor. Assim, a distribuição não linear encontrada acima representa a condição sob a qual a carga de cor quadrática total no interior da área ocupada por cada glúon seja de ordem 1. Este é exatamente o critério original para a saturação definido por Gribov, Levin e Ryskin (L. V. Gribov, E. M. Levin, M. G. Ryskin, *Phys. Rept.* 100 (1983) 1). O modelo MV exhibe uma construção explícita desse critério.

Finalmente, vamos calcular a distribuição gluônica integrada no regime de saturação, isto é, para $Q^2 \ll Q_s^2(A)$, e comparar o resultado com as duas equações acima, que representam o resultado correspondente no regime linear com momentum Q^2 elevado.

Aplicando a equação

$$\varphi_A(k_\perp) \approx \frac{1}{\alpha_s N_c} \ln \frac{Q_s^2(A)}{k_\perp^2} \quad \text{for } k_\perp \ll Q_A$$

às equações

$$xG(x, Q^2) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \Theta(Q^2 - k_\perp^2) \langle F_a^{i+}(\vec{k}) F_a^{i+}(-\vec{k}) \rangle,$$

$$\varphi_\tau(k_\perp) \equiv \frac{4\pi^3}{N_c^2 - 1} \frac{1}{\pi R^2} \frac{d^3 N}{d\tau d^2 k_\perp} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{\langle F_a^{i+}(\vec{k}) F_a^{i+}(-\vec{k}) \rangle}{N_c^2 - 1},$$

já obtidas anteriormente, obtém-se imediatamente:

$$xG_A(x, Q^2) \simeq \frac{N_c^2 - 1}{4\pi N_c} \frac{1}{\alpha_s} R_A^2 Q^2 \ln \frac{Q_s^2(A)}{Q^2}.$$

Este resultado ilustra o **sombreamento nuclear** (*nuclear shadowing*): a escala da distribuição é $A^{2/3} \ln A$, diferentemente do resultado linear, no qual a escala é simplesmente A .

A figura a seguir ilustra as várias fases da matéria em altas temperaturas, previstas em uma colisão ultrarrelativística entre íons pesados:

