Gravitação Teleparalela: Uma Nova Abordagem de Gravitação

Giovanni Otalora

Departamento de Física,
Universidade Federal de Juiz de fora
e
Instituto de Física Teórica,
Universidade Estadual Paulista

29 de maio de 2015,
Rio de Janeiro

Conteúdo

Algumas Notas Históricas

Unificação de gravitação e eletromagnetismo:

- H. Weyl, 1918: fundamentos das teorias de gauge
- A. Einstein, 1930: formalismo de tetrada para gravitação

Formulação Lagrangiana, teoria de gauge do grupo de translações:

- [Møller, 1961, 1978]
- [Pellegrini, Plebanski 1962]
- [Cho, PRD 14, 2521 (1976)]
- [Hayashi, Nakano, Prog. Theor. Phys. 38, 491 (1967)]
- [Hayashi,Shirafuji, PRD 19, 3524 (1979)]

Culminando com a teoria que hoje conhecemos como :
Equivalente Teleparalela da Relatividade Geral, ou apenas **"Gravidade Teleparalela"**.

- [Aldrovandi, Pereira: Introduction to TG, (Springer, Dordrecht, 2013)]
- [Pereira, Teleparallelism: a new insight into gravitation 2013, in Springer Handbook of Spacetime, ed. by A. Ashtekar and V. Petkov (Springer, Dordrecht, 2013)]

Fibrado Tangente

Em cada ponto do espaço-tempo (o espaço base do fibrado), há um espaço tangente ligado a ele (a fibra do fibrado).

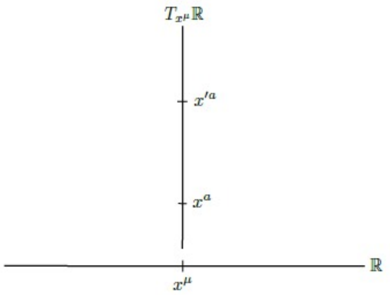

Figura 1 :

- Coordenadas do espaço-tempo serão denotadas como $\{x^\mu\}$. Define as base coordenada local $\{\partial_\mu\}$ e seu dual $\{dx^\mu\}$ no sentido $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$.
- Coordenadas do espaço tangente de Minkowski serão denotadas como $\{x^a\}$. Define as base coordenada local $\{\partial_a\}$ e seu dual $\{dx^a\}$ no sentido $dx^a(\partial_b) = \delta^a_b$.

.

Soldagem no Fibrado

Na presença de gravitação, nós denotamos o **Campo Tetrada** como

$$\{h^a\}, \quad \text{e} \quad \{h_a\} \tag{1}$$

Na base coordenada $\{\partial_\mu\}$ e seu dual $\{dx^\mu\}$

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2}$$

$$h_a = h_a{}^\mu \partial_\mu, \quad \text{e} \quad h^a = h^a_\mu dx^\mu \tag{3}$$

Pela propriedade de soldagem no fibrado (soldering)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu \tag{4}$$

O coeficiente de não holonomia é definido como

$$[h_a, h_b] = f^c{}_{ab} h_c \tag{5}$$

e em termos das componentes da tetrada

$$f^c{}_{ab} = h_a{}^\mu h_b{}^\mu \left(\partial_\nu h^c{}_\mu - \partial_\mu h^c_\nu\right) \tag{6}$$

Na ausência de gravitação e para frames inerciais $\{e'^a\}$: $e'^a{}_\mu = \partial_\mu x^a$

$$f'^c{}_{ab} = e'_a{}^\mu e'_b{}^\mu \left(\partial_\nu e'^c{}_\mu - \partial_\mu e'^c{}_\nu\right) = 0 \tag{7}$$

Conexões de Lorentz

Uma **Conexão de Lorentz** (ou conexão de spin) é uma 1-forma assumindo valores na Algebra de Lie do grupo de Lorentz:

$$A_\mu = \frac{1}{2} A^{ab}{}_\mu S_{ab} \tag{8}$$

S_{ab} é uma representação dos geradores de Lorentz
A conexão pode ser escrita em uma forma puramente espaço temporal através do campo tetrada:

$$A^{ab}{}_\mu \longleftrightarrow \Gamma^\rho_{\nu\mu}$$

Relação entre $A^{ab}{}_\mu$ e $\Gamma^\rho_{\nu\mu}$

$$\Gamma^\rho_{\nu\mu} = h_a{}^\rho A^a{}_{b\mu} h^b{}_\nu + h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu, \quad A^a{}_{b\mu} = h^a{}_\nu \Gamma^\nu{}_{\rho\mu} h_b{}^\rho + h^a{}_\nu \partial_\mu h_b{}^\nu \tag{9}$$

Estas dois conexões definem as derivadas covariantes:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + A_\mu, \qquad \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu \tag{10}$$

$\mathcal{D}_\mu$ é a derivada covariante de Fock-Ivanenko e ∇_μ a derivada covariante usual.

Curvatura e Torção

Dada uma conexão de Lorentz $A^{a}{}_{b\mu}$, sua correspondente curvatura e torção são definidas como

$$R^{a}{}_{b\nu\mu} = \partial_\nu A^{a}{}_{b\mu} - \partial_\mu A^{a}{}_{\nu} + A^{a}{}_{e\nu} A^{e}{}_{b\mu} - A^{a}{}_{e\mu} A^{e}_{b\nu}, \tag{11}$$

$$T^{a}{}_{\nu\mu} = \partial_\nu h^{a}{}_{\mu} - \partial_\mu h^{a}{}_{\nu} + A^{a}{}_{e\nu} h^{e}{}_{\mu} - A^{a}{}_{e\mu} h^{e}{}_{\nu}. \tag{12}$$

Através da contração com tetradas e a relação (9), estes tensores podem ser escritos em formas puramente espaço temporal

$$R^{\rho}{}_{\lambda\nu\mu} \equiv h_a{}^{\rho} h^{b}{}_{\lambda} R^{a}{}_{b\nu\mu} = \partial_\nu \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\eta\nu} \Gamma^{\eta}{}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\rho}{}_{\eta\mu} \Gamma^{\eta}{}_{\lambda\nu}, \tag{13}$$

$$T^{\rho}{}_{\nu\mu} \equiv h_a{}^{\rho} T^{a}{}_{\nu\mu} = \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}. \tag{14}$$

Dado que a conexão é um vetor espacio-temporal no ultimo indice

$$A^{a}{}_{bc} = A^{a}{}_{b\nu} h_c{}^{\nu} \tag{15}$$

Na base não-holonomica $\{h_a\}$, a curvatura e a torção podem ser escritas como

$$R^{a}{}_{bcd} = h_c(A^{a}{}_{bd}) - h_d(A^{a}{}_{bc}) + A^{a}{}_{ec} A^{e}{}_{bd} - A^{a}{}_{ed} A^{e}{}_{bc} - f^{e}{}_{cd} A^{a}{}_{be} \tag{16}$$

$$T^{a}{}_{bc} = A^{a}{}_{cb} - A^{a}{}_{bc} - f^{a}{}_{bc} \tag{17}$$

onde, lembrando, $h_c = h_c{}^{\mu} \partial_\mu$.

Conexão de Lorentz local

Transformação no espaço tangente

$$x'^a = \Lambda^a{}_b(x) x^b, \quad \text{com} \quad \eta_{cd}\Lambda^c{}_a(x)\Lambda^d{}_b(x) = \eta_{ab} \tag{18}$$

O frame tetrada $\{h_a\}$ se transforma como

$$h'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b(x) h^b{}_\mu, \quad e \quad h'_a{}^\mu = \Lambda_a{}^b(x) h_b{}^\mu \tag{19}$$

Usando (19)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{cd} h'^c{}_\mu h'^d{}_\nu = \eta_{cd} h^c{}_\mu h^d{}_\nu \tag{20}$$

Também a conexão é transformada como

$$A'^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c(x) A^c{}_{d\mu} \Lambda_b{}^d(x) + \Lambda^a{}_c(x)\partial_\mu \Lambda_b{}^c(x) \tag{21}$$

De esta forma, usando (11) e (12), pode ser visto que

$$T'^a{}_{\nu\mu} = \Lambda^a{}_b(x) T^b{}_{\nu\mu} \quad \text{e} \quad R'^a{}_{b\nu\mu} = \Lambda^a{}_c(x)\Lambda_b{}^d(x) R^c{}_{d\nu\mu} \tag{22}$$

Então ao igual que $g_{\mu\nu}$, as quantidades puramente espacio temporal $T^\rho{}_{\nu\mu}$ e $R^\rho{}_{\lambda\nu\mu}$ são invariantes de Lorentz localmente.

Identidades de Bianchi

Dada uma conexão de Lorentz ${A^a}_{b\mu}$, sua torção e curvatura satisfazem duas identidades chamadas identidades de Bianchi:

Há uma identidade para torção (primeira identidade de Bianchi)

$$\mathcal{D}_\nu {T^a}_{\rho\mu} + \mathcal{D}_\mu {T^a}_{\nu\rho} + \mathcal{D}_\rho {T^a}_{\mu\nu} = {R^a}_{\rho\mu\nu} + {R^a}_{\nu\rho\mu} + {R^a}_{\mu\nu\rho} \tag{23}$$

E uma identidade para curvatura (Segunda identidade de Bianchi)

$$\mathcal{D}_\nu {R^a}_{b\rho\mu} + \mathcal{D}_\mu {R^a}_{b\nu\rho} + \mathcal{D}_\rho {R^a}_{b\mu\nu} = 0 \tag{24}$$

com $\mathcal{D}_\mu$ a derivada de Fock-Ivanenko

Elas podem ser reescritas numa forma puramente espaço temporal: para torção:

$$\begin{aligned}\nabla_\nu T^\lambda_{\rho\mu} + \nabla_\mu T^\lambda_{\nu\rho} + \nabla^\lambda_{\rho\,\mu\nu} = {R^\lambda}_{\rho\mu\nu} + {R^\lambda}_{\nu\rho\mu} + {R^\lambda}_{\mu\nu\rho} + \\ {T^\lambda}_{\rho\sigma} {T^\sigma}_{\mu\nu} + {T^\lambda}_{\nu\sigma} {T^\sigma}_{\rho\mu} + {T^\lambda}_{\mu\sigma} {T^\sigma}_{\nu\rho}\end{aligned} \tag{25}$$

e para curvatura:

$$\nabla_\nu {R^\lambda}_{\sigma\rho\mu} + \nabla_\mu {R^\lambda}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\rho {R^\lambda}_{\sigma\mu\nu} = {R^\lambda}_{\sigma\mu\theta} {T^\theta}_{\nu\rho} + {R^\lambda}_{\sigma\nu\theta} {T^\theta}_{\rho\mu} + {R^\lambda}_{\sigma\rho\theta} {T^\theta}_{\mu\nu} \tag{26}$$

No caso especifico da relatividade Geral a conexão $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ tem torção zero e:

$$\underbrace{\overset{\circ}{R}{}^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu} + \overset{\circ}{R}{}^{\lambda}{}_{\nu\rho\mu} + \overset{\circ}{R}{}^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho} = 0}_{\text{Identidade Ciclica}} \tag{27}$$

e

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\nu} \overset{\circ}{R}{}^{\lambda}{}_{\sigma\rho\mu} + \overset{\circ}{\nabla}_{\mu} \overset{\circ}{R}{}^{\lambda}{}_{\sigma\nu\rho} + \overset{\circ}{\nabla}_{\rho} \overset{\circ}{R}{}^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu} = 0 \tag{28}$$

Identidade ciclica é uma consequencia de torção zero.

Conexão de Lotentz inercial

Vamos considerar a equação de movimento de uma particula livre no espaço tempo de Minkowski

$$\frac{du'^a}{d\sigma} = 0. \tag{29}$$

$u'^a \longrightarrow$ Denota a quatro-velocidades em um referencial inercial
$d\sigma^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \longrightarrow$ Intervalo invariante de Minkowski e σ o tempo própio

Através de uma transformação Lorentz local

$$u^a = \Lambda^a{}_b(x) u'^a \tag{30}$$

Neste frame, a equação de movimento assume a forma

$$\frac{du^a}{d\sigma} + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} u^b u^\mu = 0. \tag{31}$$

$\longrightarrow$

$$\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_e(x) \partial_\mu \Lambda_b{}^e(x), \tag{32}$$

é uma conexão de Lorentz puramente inercial.

Em termos da quatro-velocidade indexada espaço temporal $u^{\mu} = e_a{}^{\mu} u^a$

$$\frac{du^{\rho}}{d\sigma} + \overset{\bullet}{\gamma}{}^{\rho}{}_{\nu\mu} u^{\nu} u^{\mu} = 0 \tag{33}$$

onde

$$\overset{\bullet}{\gamma}{}^{\rho}{}_{\nu\mu} = \underbrace{e_c{}^{\rho} \partial_{\mu} e^c{}_{\nu}}_{\text{Efeitos de coordenadas}} + \underbrace{e_c{}^{\rho} \overset{\bullet}{A}{}^c{}_{b\mu} e^b{}_{\nu}}_{\text{Efeitos inerciais}} \tag{34}$$

e $\overset{\bullet}{\gamma}{}^{\rho}{}_{\nu\mu} = \overset{\bullet}{\gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}$

Na classe de frame inercial onde $\overset{\bullet}{A}{}^c{}_{b\mu} = 0$ certamente nós temos

$$\overset{\bullet}{\gamma}{}'^{\rho}{}_{\nu\mu} = e_c{}^{\rho} \partial_{\mu} e^c{}_{\nu} \tag{35}$$

Em coordenadas cartesianas onde $e'^a_{\mu} = \partial_{\mu} x^a = \delta^a{}_{\mu}$ nós temos novamente

$$\frac{du'^{\rho}}{d\sigma} = 0 \tag{36}$$

Relatividade Geral

Universalidade de Gravitação

Partículas com diferentes massas e composições sentem gravitação em tal maneira que todos eles adquirem a mesma aceleração. Gravitação é a unica força fundamental universal

$$\Updownarrow$$

Desde que as condições iniciais sejam as mesmas, todos elas seguirão a mesma trajetória.

$$\Downarrow$$

Universalidade da Queda Livre

$$\Updownarrow$$

Principio de Equivalência Fraco

Dado que as forças de inércia também são universais:

$\Downarrow$

Princípio da Equivalência Forte

$\Downarrow$

Estabelece a equivalência local entre os efeitos inerciais e gravitação.

$\Downarrow$

A Relatividade Geral foi construída para cumprir com esses princípios

Conexão de Lorentz de Relatividade Geral

Relatividade Geral concebe a interação gravitacional como uma mudança na geometria do espaço-tempo:

$$\text{Metrica de Minkowski } \eta_{\mu\nu} \longrightarrow \text{Metric } g_{\mu\nu}$$

De todas as conexões de Lorentz preservando a metrica, a escolha mais natural é a conexão de Levi-Civita (ou Christoffel)

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right) \tag{37}$$

A correspondente conexão de spin

$$\overset{\circ}{A}{}^{a}{}_{b\mu} = h^{a}{}_{\nu} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\nu}{}_{\rho\mu} h_{b}{}^{\rho} + h^{a}{}_{\nu} \partial_\mu h_{b}{}^{\nu} \tag{38}$$

É uma conexão com torção zero mas curvatura diferente de zero

$$\overset{\circ}{T}{}^{a}{}_{\nu\mu} = 0, \quad \text{e} \quad \overset{\circ}{R}{}^{a}{}_{b\nu\mu} \neq 0 \tag{39}$$

Equação de movimento de uma particula

Na relatividade geral, a equação de movimento de um partícula (sem spin) é a equação geodésica

$$\frac{du^a}{d\sigma} + \overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu} u^b u^\mu = 0 \tag{40}$$

- lado esquerdo é a quatro aceleração da partícula
- lado direito representa então o gravitacional força que actua na partícula

$$\Downarrow$$

Geometria substitui o conceito de força!

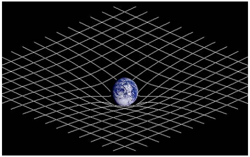

Figura 2 : A responsabilidade de descrever a gravidade é transferido para o espaço-tempo .

Geometrização da Interação

Como a Relatividade Geral descreve a interação gravitacional?

No caso de Relatividade Geral a unica conaxão presente é a conexão de Levi-Civita

$$\Downarrow$$

Neste caso, sua curvatura pode ser interpretada, juntamente com a métrica, como parte da definição do espaço-tempo

$$\Downarrow$$

Pode-se então falar de "espaço-tempo curvo", e curvatura é usada para geometrizar a interação gravitacional

Como a matéria curva o espaço-tempo?

A resposta é dada pela equação de Einstein:

$$\overset{\circ}{R}{}^{a}{}_{\mu} - \frac{1}{2} h^{a}{}_{\mu} \overset{\circ}{R} = k \overset{\circ}{T}{}^{a}{}_{\mu} \tag{41}$$

$$\Downarrow$$

Dada uma distribuição de matéria, representada pelo tensor de energia-momento $\overset{\circ}{T}{}^{a}{}_{\mu}$

$$\Downarrow$$

Nós resolvemos a equação para obter o tensor de curvatura $\overset{\circ}{R}{}^{a}{}_{b\nu\mu}$

Relatividade Geral não é uma teoria de Gauge

Ela difere de teorias de gauge em muitas maneiras:

- O campo fundamental das teorias de gauge é o potencial gauge (conexão). Enquanto que em Relatividade Geral é a metrica.
- A conexão de Levi-Civita não é uma variável gravitacional verdadeira nem uma conexão gravitacional genuína.
- As Lagrangiana gauge são quadráticas na curvatura. Einstein-Hilbert é linear.
- Einstein-Hilbert depende, além da metrica e seu derivada primeira, também da segunda derivada da metrica.
- A relatividade geral não tem um grupo de gauge. Difeomorfismos tem lugar no espaço-tempo (no espaço base) e não no espaço tangente (a fibra do fibrado tangente).

Gravitação Teleparalela

A conexão de Lorentz da Gravitação Teleparalela é a conexão puramente inercial:

$$\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} = \Lambda^{a}{}_{b}(x)\partial_{\mu}\Lambda_{b}{}^{e}(x) \tag{42}$$

Portanto, a conexão de Lorentz mantém o seu papel da relatividade especial

Esta conexão de inércia tem curvatura zero

$$\overset{\bullet}{R}{}^{a}{}_{b\nu\mu} = \partial_{\nu}\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} - \partial_{\mu}\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\nu} + \overset{\bullet}{A}{}^{a}_{e\nu}\overset{\bullet}{A}{}^{e}_{b\mu} - \overset{\bullet}{A}{}^{a}_{e\mu}\overset{\bullet}{A}{}^{e}_{b\nu} = 0 \tag{43}$$

No entanto, para uma tetrada não trivial:

$$\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\nu\mu} = \partial_{\nu}h^{a}{}_{\mu} - \partial_{\mu}h^{a}{}_{\nu} + \overset{\bullet}{A}{}^{a}_{e\nu}h^{e}{}_{\mu} - \overset{\bullet}{A}{}^{a}_{e\mu}h^{e}{}_{\nu} \neq 0 \tag{44}$$

A teoria gravitacional que se segue a partir desta escolha é uma **Teoria Gauge** para o **Grupo de Traslações**

Por que o grupo de traslações?

A resposta se segue de colocar o paradigma gauge em ação

Primeiro vamos lembrar o caso do Eletromagnetismo, uma teoria gauge para o **grupo U(1)**:

A fonte do campo electromagnético é a quatro-corrente elétrica

$$\Downarrow$$

Teorema de Noether: Invariância do lagrangiano fonte sob transformações globais do **grupo U(1)**, quatro-corrente elétrica é conservada

$$\Downarrow$$

A fim de recuperar essa simetria para transformações locais do mesmo grupo, é necessário introduzir uma conexão assumindo valores da álgebra de Lie de do **grupo U(1)**

$$\Downarrow$$

Esta conexão representa o potencial eletromagnético, e eletromagnetismo surge como uma teoria de gauge do **grupo U(1)**.

No caso de gravitação???...

A fonte da gravitação é energia e momento

$$\Downarrow$$

Teorema de Noether: o tensor de energia-momento é conservado desde que o lagrangiano fonte seja invariante sob traslações espaço-temporais.

$$\Downarrow$$

Se a gravidade é para ser descrita por uma teoria gauge com energia-momento como uma fonte, esta deve ser uma teoria gauge para o **Grupo de Traslações**.

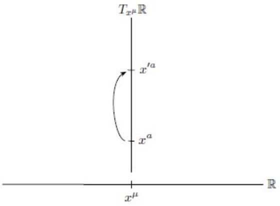

Figura 3 : $x^a \to x'^a = x^a + \epsilon^a(x^\mu)$.

Campo Fundamental

O **Potencial de Gauge das Translações** B_μ o qual é uma 1-forma assumindo valores na álgebra de Lie do grupo de translações

$$B_\mu = B^a{}_\mu P_a \tag{45}$$

$P_a = \partial_a$ são os geradores das translações. B_μ aparece como a parte não trivial do campo tétrada $h^a{}_\mu$:

$$h^a{}_\mu = \underbrace{e^a{}_\mu}_{\text{Parte trivial}} + \underbrace{B^a{}_\mu}_{\text{Campo gravitacional}} = \underbrace{\partial_\mu x^a + \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} x^b}_{e^a{}_\mu} + B^a{}_\mu \tag{46}$$

Por parte não trivial queremos dizer $B^a{}_\mu \neq \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_\mu \epsilon^a$.

Da relação de conmutação para as derivadas gauge $h_\mu = h^a{}_\mu \partial_a$

$$[h_\mu, h_\nu] = \overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu} P_a \tag{47}$$

Nós encontramos

$$\overset{\bullet}{T}{}^a{}_{\mu\nu} = \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_\mu B^a{}_\nu - \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_\nu B^a{}_\mu = \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_\mu h^a{}_\nu - \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_\nu h^a{}_\mu \neq 0 \tag{48}$$

A **Intensidade do Campo (Field Strength)** do potencial gauge é a Torção.

Lagrangiana Teleparalela e Equação de Campo

O Lagrangiana, como qualquer Lagrangiana de gauge, é quadrática:

$$\overset{\bullet}{\mathcal{L}} = \frac{h}{2\kappa} T = \frac{h}{2\kappa}\left(\frac{1}{4} T_{\rho}{}^{\mu\nu} T^{\rho}{}_{\mu\nu} + \underbrace{\frac{1}{2} T^{\rho\mu}{}_{\nu} T^{\nu}{}_{\mu\rho} - T_{\rho}{}^{\mu\rho} T^{\nu\mu}{}_{\nu}}_{Soldering}\right) \tag{49}$$

$h \equiv \det h^{a}{}_{\mu} = \sqrt{-g}$.
Variação do lagrangiano em relação ao campo de gauge ou tetrada produz

$$\partial_{\sigma}(h\overset{\bullet}{S}_{a}{}^{\rho\sigma}) - \kappa(h\overset{\bullet}{J}_{a}{}^{\rho}) = 0 \tag{50}$$

com o superpotencial

$$\overset{\bullet}{S}_{a}{}^{\mu\nu} = -\overset{\bullet}{S}_{a}{}^{\nu\mu} = -\frac{\kappa}{h}\frac{\partial\overset{\bullet}{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_{\sigma} h^{a}{}_{\rho})} \tag{51}$$

e a pseudo-corrente de energia e momento levada pelo campo gravitacional

$$\overset{\bullet}{J}_{a}{}^{\mu} = -\frac{1}{h}\frac{\partial\overset{\bullet}{\mathcal{L}}}{\partial h^{a}{}_{\rho}} \tag{52}$$

Equivalência com a Relatividade Geral

Pelo teorema do Ricci, dada uma conexão de Lorentz geral ${A^a}_{b\mu}$ então:

$$ {A^a}_{b\mu} = {\overset{\circ}{A}{}^a}_{b\mu} + {K^a}_{b\mu}, \quad {K^a}_{b\mu} \equiv \frac{1}{2}\left({T_b{}^a}_{\mu} + {T_\mu{}^a}_{b} - {T^a}_{b\mu} \right) \tag{53} $$

com ${K^a}_{b\mu}$ o tensor de contorção

No caso especifico da conexão de spin teleparalela ${\overset{\bullet}{A}{}^a}_{b\mu}$, a relação toma a forma:

$$ {\overset{\bullet}{A}{}^a}_{b\mu} = {\overset{\circ}{A}{}^a}_{b\mu} + {K^a}_{b\mu} \tag{54} $$

Usando esta identidade na lagrangiana

$$ \overset{\bullet}{\mathcal{L}} = \frac{h}{2\kappa}\overset{\circ}{R} - \partial_\mu \omega^\mu \tag{55} $$

Usando a mesma relação na equação de campo

$$ \partial_\sigma\left(h {\overset{\bullet}{S}_a}{}^{\rho\sigma}\right) - \kappa\left(h {\overset{\bullet}{j}_a}{}^{\rho}\right) = h\left({\overset{\circ}{R}_a}{}^{\rho} - \frac{1}{2} {h_a}^{\rho}\overset{\circ}{R} \right) \tag{56} $$

Gravitação Teleparalela é equivalente a Relatividade Geral

Separando Inércia de Gravitação

Vamos considerar novamente a identidade

$$\overset{\circ}{A}{}^{a}{}_{b\mu} = \underbrace{\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}}_{\text{Inercia}} - \underbrace{\overset{\bullet}{K}{}^{a}{}_{b\mu}}_{\text{Gravitação}} \tag{57}$$

Dado que $\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}$ representa somente a efeitos inerciais, então esta equação corresponde a uma separação entre efeitos inerciais e gravitação

$$\Downarrow$$

No frame local para o qual $\overset{\circ}{A}{}^{a}{}_{b\mu} = 0$, a identidade acima torna-se

$$\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} = \overset{\bullet}{K}{}^{a}{}_{b\mu} \tag{58}$$

Esta expressão mostra explicitamente que, nesse frame, os efeitos inerciais compensam exatamente a Gravitação

Equação de Particula de Movimento

Da relatividade geral, para uma particula sem spin

$$\frac{du^a}{d\sigma} + \overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu} u^b u^\mu = 0 \tag{59}$$

Substituindo a identidade

$$\overset{\circ}{A}{}^a{}_{b\mu} = \overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} - \overset{\bullet}{K}{}^a{}_{b\mu} \tag{60}$$

obtém-se a equação de movimento correspondente em Gravitação Teleparalela:

$$\frac{du^a}{d\sigma} + \underbrace{\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu} u^b u^\mu}_{\text{Inercia do frame}} = \underbrace{\overset{\bullet}{K}{}^a{}_{b\rho} u^b u^\rho}_{\text{Força Gravitacional}} \tag{61}$$

Esta é a versão teleparalela da equação de movimento.

- Esta é uma equação da força, com contorção jogando o papel da força gravitacional.
- Os efeitos de inércia do frame são representados pela conexão do lado esquerdo, que é não-covariante por sua própria natureza.
- Os efeitos inerciais permanecem geometrizados no sentido da Relatividade Geral.

Localização da Energia Gravitacional

Vamos pegar novamente a equação de campo teleparalela (50)

$$\partial_\sigma(h\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}) - \kappa(h\overset{\bullet}{J}_a{}^{\rho}) = 0 \tag{62}$$

O pseudotensor de energia-momento é dado por

$$\overset{\bullet}{J}_a{}^{\rho} = \underbrace{\frac{1}{\kappa} h_a{}^{\lambda} \overset{\bullet}{S}_c{}^{\nu\rho} \overset{\bullet}{T}{}^c{}_{\nu\lambda} - \frac{h_a{}^{\rho}}{h} \overset{\bullet}{\mathcal{L}}}_{\text{Covariante}} + \underbrace{\frac{1}{\kappa} \overset{\bullet}{A}{}^c{}_{a\lambda} \overset{\bullet}{S}_c{}^{\rho\lambda}}_{\text{Não covariante}} = \overset{\bullet}{t}_a{}^{\rho} + \overset{\bullet}{i}_a{}^{\rho} \tag{63}$$

A equação de campo pode ser reescrita como

$$\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_\sigma(h\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}) - \kappa h\overset{\bullet}{t}_a{}^{\rho} = 0 \tag{64}$$

Dado que a conexão $\overset{\bullet}{A}{}^a{}_{b\mu}$ tem curvatura zero

$$[\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_\rho, \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_\sigma] = 0 \tag{65}$$

E dado que $\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma} = -\overset{\bullet}{S}_a{}^{\sigma\rho}$

$$\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_\rho(h\overset{\bullet}{t}_a{}^{\rho}) = 0 \tag{66}$$

Comparasão com Relatividade Geral

A Lagrangiana de Einstein-Hilbert pode ser dividida na forma

$$\overset{\circ}{\mathcal{L}} = \overset{\circ}{\mathcal{L}}_1 + \partial_\mu(h\omega^\mu) = \overset{\bullet}{\mathcal{L}'}_1 + \partial_\mu(h\omega'^\mu) = \overset{\bullet}{\mathcal{L}''}_1 + \partial_\mu(h\omega''^\mu) = \dots \tag{67}$$

Dado que o termo de superficie não contribui à equação de campo

$$\frac{\partial \overset{\circ}{\mathcal{L}}_1}{\partial h^a{}_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \overset{\circ}{\mathcal{L}}_1}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)} = 0 \tag{68}$$

o qual conduz à forma potencial para a equação de Einstein

$$\partial_\sigma(h\overset{\circ}{S}_a{}^{\rho\sigma}) - \kappa h\overset{\circ}{J}_a{}^{\rho} = 0, \quad \overset{\circ}{S}_a{}^{\rho\sigma} = -\frac{\kappa}{h}\frac{\partial \overset{\circ}{\mathcal{L}}_1}{\partial(\partial_\sigma h^a{}_\rho)}, \quad \overset{\circ}{J}_a{}^{\rho} = -\frac{1}{h}\frac{\partial \overset{\circ}{\mathcal{L}}_1}{\partial h^a{}_\rho} \tag{69}$$

Seguindo os mesmos pasos da gravitação teleparalela

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\sigma(h\overset{\circ}{S}_a{}^{\rho\sigma}) - \kappa h\overset{\circ}{t}_a{}^{\rho} = 0 \tag{70}$$

Há um problema

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\rho(h\overset{\circ}{t}_a{}^{\rho}) \neq 0 \tag{71}$$

Na classe preferida de frames $h'^{a}{}_{\mu}$ onde se tem ausencia de efeitos inerciais, $\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu} = 0$

$$\partial_\sigma (h' \overset{\bullet}{S}{}'_{a}{}^{\rho\sigma}) - \kappa h' \overset{\bullet}{t}{}'_{a}{}^{\rho} = 0 \tag{72}$$

Nesta classe de frames

$$\partial_\rho (h' \overset{\bullet}{t}{}'_{a}{}^{\rho}) = 0 \tag{73}$$

A energia gravitacional pode ser obtida mediante a integração das componentes de $t'_{a}{}^{\rho}$ no volume space-like V

$$P'_a = \int_V d^3x h' \overset{\bullet}{t}{}'_{a}{}^{0} = \frac{1}{\kappa} \int_{\partial V} d\sigma_i h' \overset{\bullet}{S}{}'_{a}{}^{0i} \tag{74}$$

Certamente em uma classe de frame não inercial nós temos

$$\overset{\bullet}{t}_{a}{}^{\rho} = \Lambda^{b}{}_{a}(x) \overset{\bullet}{t}{}'_{a}{}^{\rho} \tag{75}$$

Este problema pode ser contornado se nós consideramos

$$P_a = \int_V d^3x h (\underbrace{\overset{\bullet}{t}{}'_{a}{}^{0} + \overset{\bullet}{i}{}'_{a}{}^{0}}_{J_a{}^{0}}) = \frac{1}{\kappa} \int_{\partial V} d\sigma_i h \overset{\bullet}{S}_{a}{}^{0i} \tag{76}$$

Renormalização de Ação Teleparalela

Dada uma tetrada geral, [Martin, Pereira, arXiv:1504.07683 [gr-qc]]

$$h^a{}_\mu = \underbrace{\partial_\mu x^a + \dot{A}^a{}_{b\mu} x^b}_{\text{Efeitos inerciais}} + \underbrace{B^a{}_\mu}_{\text{Gravitação}} \tag{77}$$

È definida uma tetrada de referência

$$h^a_{(r)\mu} \equiv h^a{}_\mu|_{G\to 0} = \underbrace{\partial_\mu x^a + \dot{\omega}^a{}_{b\mu} x^b}_{\text{Efeitos inerciais}} \tag{78}$$

Certamente, para esta tetrada nós encontramos

$$\dot{T}^a{}_{\mu\nu}(h^a_{(r)\mu}, \dot{\omega}^a{}_{b\mu}) = 0 \tag{79}$$

Para qualquer frame o tensor de torção pode ser escrito como

$$\dot{T}^a{}_{bc} = -f^a_{bc} + \dot{A}^a{}_{cb} - \dot{A}^a{}_{bc} \tag{80}$$

No caso da tetrada de referência

$$\dot{T}^a{}_{\mu\nu}(h^a_{(r)\mu}, \dot{\omega}^a{}_{b\mu}) = -f^a_{bc}(h_{(r)}) + \dot{\omega}^a{}_{cb} - \dot{\omega}^a{}_{bc} = 0 \tag{81}$$

$f^a_{bc}(h_{(r)})$ o coeficiente de não-holonomia da tetrada de referência.

Associada a esta tetrada de referência encontra-se a conexão de spin teleparalela

$$\overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{b\mu} = \frac{1}{2} h^{a}_{(r)\mu} \left[f_{b}{}^{a}{}_{c}(h_{(r)}) + f_{b}{}^{a}{}_{c}(h_{(r)}) - f^{a}{}_{bc}(h_{(r)}) \right] \qquad (82)$$

Conexão de spin naturalmente associada com a tetrada completa $h^{a}{}_{\mu}$.

Vamos considerar primeiro

$$\overset{\bullet}{S}(h^{a}_{(r)\mu}, 0) = \int_{\mathcal{M}} \overset{\bullet}{\mathcal{L}}(h^{a}_{(r)\mu}, 0) \neq 0 \qquad (83)$$

Agora vamos considerar a conexão apropiada

$$\overset{\bullet}{S}(h^{a}_{(r)\mu}, \overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{b\mu}) = \int_{\mathcal{M}} \overset{\bullet}{\mathcal{L}}(h^{a}_{(r)\mu}, \overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{b\mu}) = 0 \quad \text{aliás} \quad \overset{\bullet}{\mathcal{L}}(h^{a}_{(r)\mu}, \overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{b\mu}) = 0 \qquad (84)$$

Dado que desde o ponto de vista dos efeitos inerciais $h^{a}_{(r)\mu}$ e h^{a}_{μ} são equivalentes

$$\overset{\bullet}{S}_{ren} = \int_{\mathcal{M}} \overset{\bullet}{\mathcal{L}}(h^{a}{}_{\mu}, \overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{b\mu}) \qquad (85)$$

Concetualmente semelhante ao metodo de [Gibbons, Hawking, PRD 15 (1977)]. mas esta vez os efeitos inerciais são removidos localmente.

Solução de Schwarzschild

O exemplo mais simples não-trivial do campo gravitacional é a solução de Schwarzschild , cuja métrica tem a forma

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{86}$$

existem infinitas tetradas que produzem a métrica acima. Como exemplo, vamos considerar a tetrada diagonal

$$h^a{}_\mu = \mathrm{diag}(\sqrt{f(r)}, \frac{1}{\sqrt{f(r)}}, r, r\sin\theta), \tag{87}$$

Substituindo nas equações de campo

$$f(r) = 1 - \frac{\alpha}{r} \tag{88}$$

com $\alpha = 2GM$.

Vamos primeiro definir a tetrada de referência

$$h^{a}{}_{(r)\mu} \equiv h^{a}{}_{\mu}|_{G\to 0} = \mathrm{diag}(1, 1, r, r\sin\theta) \tag{89}$$

Nós calculamos os coeficientes de não-holonomia

$$f^{\hat{2}}{}_{\hat{2}\hat{1}} = -f^{\hat{2}}{}_{\hat{1}\hat{2}} = f^{\hat{3}}{}_{\hat{3}\hat{1}} = -f^{\hat{3}}{}_{\hat{1}\hat{3}} = \frac{1}{r}, \quad f^{\hat{3}}{}_{\hat{3}\hat{2}} = -f^{\hat{3}}{}_{\hat{2}\hat{3}} = \frac{\cot\theta}{r} \tag{90}$$

Então usando (82) nós calculamos as componentes da conexão de spin

$$\overset{\bullet}{\omega}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{2}\theta} = -\overset{\bullet}{\omega}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{1}\theta} = -1, \; \overset{\bullet}{\omega}{}^{\hat{1}}{}_{\hat{3}\phi} = -\overset{\bullet}{\omega}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{1}\phi} = -\sin\theta, \; \overset{\bullet}{\omega}{}^{\hat{2}}{}_{\hat{3}\phi} = -\overset{\bullet}{\omega}{}^{\hat{3}}{}_{\hat{2}\phi} = -\cos\theta \tag{91}$$

A correspondete ação renormalizada é encontrada a ser

$$\overset{\bullet}{S}_{ren}(h^{a}{}_{\mu}, \overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{b\mu}) = \frac{2}{\kappa}\int_{\mathcal{M}} d^4x \left[1 + \frac{GM - r}{r\sqrt{f}}\right]\sin\theta = \int dtM \tag{92}$$

Nós podemos conferir que a densidade de energia e momento é

$$P_a = \int_V d^3x h(u_\nu J_a{}^{\nu}) = \frac{1}{\kappa}\int_{\partial V} d\theta d\phi (h u_\nu n_\rho \overset{\bullet}{S}_a{}^{\nu\rho}) = (M, 0, 0, 0) \tag{93}$$

u_ν é vetor unitario time-like normal a V e n_ρ vetor unitario normal à superficie na direção radial.

Conclusões

- Como qualquer outra interação da natureza, a gravitação tem uma descrição em termos de uma teoria de gauge: **Gravitação Teleparalela**
- Em gravidade teleparalela o campo gravitacional é representado pelo potencial de gauge
- Se o espaço-tempo é curvo ou não é uma questão de convenção
- A conexão de spin da gravitação teleparalela representa somente efeitos inerciais o qual permite separar inercia de gravitação
- Uma vez que em gravidade teleparalela é possível separar os efeitos inerciais de gravitação, verifica-se que é possível obter uma definição local para a densidade de energia-momento do campo gravitacional.
- A função da conexão de spin da gravitação teleparalela é remover as contribuções espúrias vindo dos efeitos inerciais do frame. Como consequência, o princípio variacional no caso teleparalelo permanece sempre bem definido.