Introdução à Abordagem Funcional da Teoria Quântica de Campos

Sebastião Alves Dias, AFV – 2015

Lista de exercícios 02

1. Escreva a contribuição de segunda ordem em λ (considerando uma teoria de campo escalar com potencial $\lambda\phi^4/4!$) para as funções de Green $G^{(2)}(x_1, x_2)$ e $G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

2. Considere funcionais geradores para as funções de Green associadas a partículas *bosônicas*

$$Z[j] = 1 + \sum_{N,M=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 ... dx_n j(x_1) ... j(x_n) \times G^{(n)}(x_1, ..., x_n),$$

e para a sua parte *conexa* (que só envolve diagramas de Feynman conexos)

$$W[j] = 1 + \sum_{N,M=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 ... dx_n j(x_1) ... j(x_n) \times G_{\mathrm{c}}^{(n)}(x_1, ..., x_n),$$

Mostre que, se

$$Z[j] = \exp(iW[j]),$$

então as funções de Green não conexas se expressam em termos das conexas como:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, ..., x_n) &= G_{\mathrm{c}}^{(n)}(x_1, ..., x_n) \\ &\quad + \sum_{\text{partições}} G_{\mathrm{c}}^{(n_1)}(x_1, ..., x_{n_1}) G_{\mathrm{c}}^{(n_2)}(x_1, ..., x_{n_2}) ... \end{aligned}$$

onde cada partição é composta por uma divisão das coordenadas em subconjuntos. Por exemplo, as partições de (x_1, x_2, x_3, x_4) são

$$\begin{aligned} &\{(x_1, x_2), (x_3, x_4)\}, \\ &\{(x_1, x_3), (x_2, x_4)\}, \\ &... \end{aligned}$$

Faça uma interpretação gráfica do resultado acima.

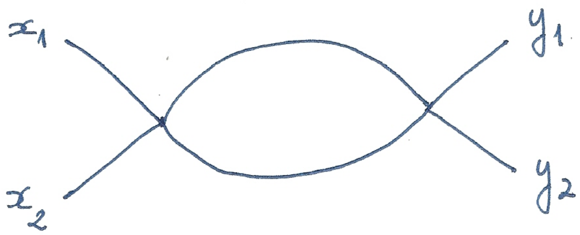
Sugestão: comece considerando casos simples ($n = 1$, 2,...) e vá ganhando intuição a partir daí.

3. A fórmula de redução permite que escrevamos um elemento de matriz S em termos da função de Green correspondente à soma das partículas nos estados *in* e *out*. Assim, se o estado *in* consiste de n partículas escalares com momenta p_i e o estado *out* possui k partículas do mesmo tipo, com momenta q_i, a fórmula de redução nos diz que, a menos de termos chamados "desconexos",

$$
\begin{aligned}
&\langle p_1, ..., p_n | q_1, ..., q_k \rangle = \left(\frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^{n+k} \int dx_1 ... dx_n dy_1 ... dy_k \\
&\times e^{-ip_1 x_1} ... e^{-ip_n x_n} e^{iq_1 y_1} ... e^{iq_k y_k} \\
&\times \left(\Box_{x_1} + m^2 \right) ... \left(\Box_{x_n} + m^2 \right) \left(\Box_{y_1} + m^2 \right) ... \left(\Box_{y_k} + m^2 \right) \\
&\times \langle 0 | T \left(\phi(x_1) ... \phi(x_n) \phi(y_1) ... \phi(y_k) \right) | 0 \rangle ,
\end{aligned}
$$

onde os campos $\phi(x)$ são campos escalares quânticos, satisfazendo às equações de Heisenberg para um potencial $\lambda \phi^4 / 4!$ e Z é um fator de normalização.

(a) Escreva a expressão matemática do gráfico de Feynman abaixo,



explicitando as expressões dos propagadores livres em termos de suas transformadas de Fourier,

$$
\Delta_{\mathrm{F}}(x-y) = \int \frac{dp'}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip'(x-y)}}{p'^2 - m^2 + i\varepsilon}.
$$

e mostre que a expressão obtida é

$$
\begin{aligned}
&i^6 (-i\lambda) \int \frac{dp'_1}{(2\pi)^4} \frac{dp'_2}{(2\pi)^4} \frac{dq'_1}{(2\pi)^4} \frac{dq'_2}{(2\pi)^4} e^{-ip'_1 x_1} e^{-ip'_2 x_2} e^{-iq'_1 y_1} e^{-iq'_2 y_2} \\
&\times \frac{1}{p'^2_1 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{p'^2_2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{q'^2_1 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{q'^2_2 - m^2 + i\varepsilon} \\
&\times f\left(p'_1, p'_2, q'_1, q'_2 \right)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
&f\left(p'_1, p'_2, q'_1, q'_2 \right) = (2\pi)^4 \delta\left(p'_1 + p'_2 + q'_1 + q'_2 \right) \\
&\times \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p'_1 + p'_2 - q)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}
\end{aligned}
$$

(b) Calcule a contribuição do gráfico de Feynman do ítem a) ao elemento de matriz S $\langle p_1, p_2 | q_1, q_2 \rangle$ (observe, no processo, que cada operador $\Box + m^2$ remove um dos fatores $1/\left(p^2 - m^2 + i\varepsilon\right)$ e que cada transformada de Fourier faz a identificação $p_i' \rightarrow p_i$).

Referência para os exercícios 1 e 2: seções 6.5 e 6.6 de Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*.