Introdução à Abordagem Funcional da Teoria Quântica de Campos

Sebastião Alves Dias, AFV – 2015

Lista de exercícios 01

1. Considere um operador de campo escalar real que satisfaça à equação de Klein-Gordon
$$\left(\Box + m^2\right)\phi(x) = 0.$$
Conforme foi dito nas aulas, a forma mais geral desse operador é
$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, 2\pi\delta\left(p^2 - m^2\right)\theta\left(p^0\right)\left(a(p)\, e^{-ipx} + a^\dagger(p)\, e^{ipx}\right) = \phi^\dagger(x),$$
onde $a(p)$ é um operador a ser encontrado e $a^\dagger(p)$ é o seu adjunto.

   (a) Usando a identidade
$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left|df/dx\right|_{x=x_i}},$$
onde x_i são raízes de f $(f(x_i) = 0)$ e a soma é sobre todas as raízes que estão na faixa de integração, mostre que
$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2p^0}\left(a(\vec{p})\, e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})\, e^{ipx}\right),$$
com $p^0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ e a notação $a(\vec{p})$ indicando apenas a dependência nas variáveis independentes.

   (b) Lembrando que o momentum canonicamente conjugado ao campo ϕ é
$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2p^0}\left(p^0 a(\vec{p})\, e^{-ipx} - p^0 a^\dagger(\vec{p})\, e^{ipx}\right),$$
expresse $a(\vec{p})$ e $a^\dagger(\vec{p})$ em termos de $\phi(x)$ e $\pi(x)$, obtendo
$$\begin{aligned} a(\vec{p}) &= \int d^3x\, e^{ipx}\left(p^0\phi(\vec{x},t) + i\pi(\vec{x},t)\right), \\ a^\dagger(\vec{p}) &= \int d^3x\, e^{-ipx}\left(p^0\phi(\vec{x},t) - i\pi(\vec{x},t)\right). \end{aligned}$$
A partir dessas expressões e das relações de comutação canônicas
$$\begin{aligned} \left[\phi(\vec{x},t), \pi(\vec{y},t)\right] &= i\delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \left[\phi(\vec{x},t), \phi(\vec{y},t)\right] &= 0, \\ \left[\pi(\vec{x},t), \pi(\vec{y},t)\right] &= 0, \end{aligned}$$

mostre que

$$\begin{aligned}\left[a\left(\vec{p}\right), a^{\dagger}\left(\vec{p}'\right)\right] &= (2\pi)^3\, 2p^0 \delta\left(\vec{p}-\vec{p}'\right),\\ \left[a\left(\vec{p}\right), a\left(\vec{p}'\right)\right] &= 0 = \left[a^{\dagger}\left(\vec{p}\right), a^{\dagger}\left(\vec{p}'\right)\right].\end{aligned}$$

(c) Mostre que a Hamiltoniana

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right)$$

pode ser expressa em termos dos operadores $a\left(\vec{p}\right)$ e $a^{\dagger}\left(\vec{p}\right)$ como

$$H = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p^0}p^0\left(a^{\dagger}\left(\vec{p}\right)a\left(\vec{p}\right) + a\left(\vec{p}\right)a^{\dagger}\left(\vec{p}\right)\right).$$

(d) Após interpretar $a\left(\vec{p}\right)$ e $a^{\dagger}\left(\vec{p}\right)$ como operadores de aniquilação e criação e encontrar os autoestados da Hamiltoniana, mostre que

$$:H: = H - \langle 0|H|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p^0}p^0 a^{\dagger}\left(\vec{p}\right)a\left(\vec{p}\right),$$

com $:H:$ definindo a forma chamada de *normalmente ordenada* do Hamiltoniano.

2. Generalize a construção acima para um campo escalar complexo, cuja densidade de Lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^{\dagger}\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^{\dagger}\phi.$$

Mostre que a solução das equações de Heisenberg é

$$\phi\left(x\right) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, 2\pi\delta\left(p^2-m^2\right)\theta\left(p^0\right)\left(a\left(p\right)e^{-ipx} + b^{\dagger}\left(p\right)e^{ipx}\right) \neq \phi^{\dagger}\left(x\right).$$

Encontre a Hamiltoniana, H, e mostre que o seguinte operador

$$\begin{aligned} :Q: &= Q - \langle 0|Q|0\rangle\\ &= :q\int d^3x\left(\phi^{\dagger}\partial^0\phi - \left(\partial^0\phi^{\dagger}\right)\phi\right):\\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p^0}q\left(a^{\dagger}\left(\vec{p}\right)a\left(\vec{p}\right) - b^{\dagger}\left(\vec{p}\right)b\left(\vec{p}\right)\right)\end{aligned}$$

comuta com H e que, portanto, os autoestados de H também são autoestados de Q. Você arriscaria uma interpretação para os autovalores?

Referência: Capítulo 3 de B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*.